

Kolmasluokkalaisten oppilaiden piirustuksissa esiintyvät käsitykset geometriasta ja geometrian opetuksesta

Helsingin yliopisto
Luokanopettajan koulutus
Pro gradu -tutkielma
Kasvatustiede
Huhtikuu 2019
Laura Keskinen

Ohjaajat: Anu Laine, Markku Hannula
ja Eeva Haataja



Tiedekunta - Fakultet - Faculty Kasvatustieteellinen tiedekunta		
Tekijä - Författare - Author Laura Keskinen		
Työn nimi - Arbetets titel Kolmasluokkalaisten oppilaiden piirustuksissa esiintyvät käsitykset geometriasta ja geometrian opetuksesta		
Title The understanding of geometry and geometry teaching within drawings of third graders		
Oppiaine - Läroämne - Subject Kasvatustiede		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Anu Laine, Markku Hannulla ja Eeva Haataja	Aika - Datum - Month and year 04/2019	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 98 s + 6 liite
Tiivistelmä - Referat - Abstract <p>Tämän Pro-gradu tutkielman tarkoituksena on selvittää, minkälaisia käsityksiä kolmasluokkala- laisilla oppilailla on geometriasta ja geometrian opetuksesta. Tutkielma pohjautuu saksalai- seen ”Draw Me Emma” -tutkimushankkeeseen. Oppilaiden käsityksien tutkiminen on tärkeää, koska geometria on oma sisältöalueensa alakoulun matematiikan opetuksessa. Geometria ja erityisesti euklidinen geometria kehittää lasten deduktiivista ajattelua sekä visuaalista hahmo- tuskyykyä, minkä myötä geometrian opetuksen tärkeys korostuu. Saksalaisen tutkimuksen ohella oppilaiden käsityksistä geometriaa ja geometrian opetusta kohtaan ei löydy juurikaan aiempaa tutkimusta, minkä vuoksi lisätutkimukselle on tarvetta.</p> <p>Tässä tutkielmassa käytetty tutkimusaineisto on kerätty tammikuussa 2019. Tutkielmassa oli mukana 47 kolmasluokkalaista oppilasta sekä heidän kaksi luokanopettajaansa. Oppilaat oli- vat kahdesta eri kolmannesta luokasta samasta pääkaupunkiseudulla sijaitsevasta peruskou- lusta. Jokainen osallistuja teki kaksi erilaista piirustusta. Aineisto koostui siis yhteensä 98 pii- rustuksesta, joista 94 oli oppilaiden tekemiä ja neljä heidän luokanopettajiensa. Tutkielman pääpaino oli oppilaiden piirustuksissa. Piirustuksien analysoinnissa hyödynsin piirrosanalyyy- sia, jonka pohja oli samanlainen kuin saksalaisessa alkuperäistutkimuksessa. Tutkin oppilai- den käsityksiä luokkakohtaisesti sekä luokkia keskenään vertaillen. Osana käsityksien tar- kastelua tutkin, kuinka oppilaiden käsitykset ja heidän luokanopettajiensa käsitykset omista oppilaistaan vastasivat toisiaan.</p> <p>Tutkielman tulokset osoittivat, että oppilaiden käsitykset geometriasta keskittyivät kaksiulot- teisiin tasokuvioihin ja kolmiulotteisiin kappaleisiin. Erityisesti tasokuviot nousivat oppilaiden piirustuksista esille. Oppilaiden käsityksissä geometrian opetusta kohtaan korostui itsenäinen työskentely. Suurimmassa osassa piirustuksista opettaja oli piirretty seisomaan taulun eteen ja oppilaat omien pultettien ääreen työskentelemään itsenäisesti tehtävien parissa.</p>		
Avainsanat - Nyckelord Geometria, geometrian opetus, käsitys, piirustus, piirrosanalyysi		
Keywords Geometry, geometry teaching, understanding, drawings, drawing analysis		
Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited Helsingin yliopiston kirjasto – Helda / E-thesis (opinnäytteet)		
Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information		



Tiedekunta - Fakultet - Faculty Educational Sciences		
Tekijä - Författare - Author Laura Keskinen		
Työn nimi - Arbetets titel Kolmasluokkalaisten oppilaiden piirustuksissa esiintyvät käsitykset geometriasta ja geometrian opetuksesta		
Title The understanding of geometry and geometry teaching within drawings of third graders		
Oppiaine - Läroämne – Subject Educational sciences		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Anu Laine, Markku Hannulla ja Eeva Haataja	Aika - Datum - Month and year 4/2019	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 98 s + 6 liite
Tiivistelmä - Referat - Abstract <p>The goal of this master's thesis is to determine what kind of concept and level of understanding third grade pupils have concerning geometry and geometry teaching. This thesis is based on the German "Draw Me Emma" –research project. Studying the pupils' understanding of geometry is important because geometry forms an independent area in primary school mathematics. Geometry and especially euclidian geometry improves children's deductive thinking and visual perception, which further adds to the subjects significance. Aside from the German research project there has been very little research concerning the pupils' concept of geometry and geometry teaching, which shows the need for further studying.</p> <p>The research material used in this thesis has been gathered in January 2019. 47 third graders and their two class teachers were involved in the process. The pupils were from two different third grade classes in the Helsinki metropolitan area. Each participant drew two different drawings. The material consists of 98 drawings out of which 94 were made by the pupils and four by their class teachers. The main focus of the thesis is on the drawings of the pupils. In analyzing the drawing I made use of the drawing analysis which was structurally identical to the German original study. I studied the pupils' perceptions within the classes and comparing the classes with one another. As a part of the analysis I also studied the correlation between the pupils' perceptions and the class teachers' perceptions of their own pupils.</p> <p>The results of the thesis show that the pupils' concept and perceptions of geometry are focused on two-dimensional plane figures and three-dimensional objects. Especially plane figures were frequent in the pupils' drawings. The views of the pupils concerning the teaching of geometry underlined independent work. In most of the drawings the teacher had been drawn standing in front of the blackboard and the pupils at their own desks working independently on exercises.</p>		
Avainsanat - Nyckelord Geometria, geometrian opetus, käsitys, piirustus, piirrosanalyysi		
Keywords Geometry, geometry teaching, understanding, drawings, drawing analysis		
Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited Helsinki University Library – Helda / E-thesis (theses)		
Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information		

Sisällys

1	JOHDANTO.....	3
2	GEOMETRIA.....	5
	2.1 Geometrian historia	5
	2.2 Geometria alakoulussa	7
	2.3 Geometrian peruskäsitteet.....	8
3	GEOMETRIAN OPETUS ALAKOULUSSA	18
	3.1 Lähestymistavat geometrian opetukseen	18
	3.2 Geometrian opetuksen rakenne	19
	3.3 Geometria opetussuunnitelmassa.....	22
	3.4 Oppilaiden käsitykset geometriasta ja geometrian opetuksesta	25
	3.4.1 Van Hielen teoria.....	26
	3.4.2 Oppilaiden käsitykset geometriasta	27
	3.4.3 Oppilaiden käsitykset geometrian opetuksesta	31
4	TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET.....	33
5	TUTKIMUKSEN TOTEUTUS.....	34
	5.1 Tutkimusasetelma.....	34
	5.2 Aineiston esittely ja hankinta.....	35
	5.3 Piirrosanalyysi menetelmänä	37
	5.4 Aineiston analysointi	38
6	OPPILAIEN KÄSITYKSET GEOMETRIASTA	43
	6.1 Oppilaiden käsityksien tarkastelu	43
	6.2 Oppilaiden käsitykset aihealueittain	43
	6.3 Yhteenveto tuloksista.....	60
7	OPPILAIEN KÄSITYKSET GEOMETRIAN OPETUKSESTA	63
	7.1 Oppilaiden käsityksien tarkastelu	63
	7.2 Oppilaiden käsitykset kolmessa ulottuvuudessa	64
	7.2.1 Suhteet.....	64
	7.2.2 Tavoite	80
	7.2.3 Tavat ja järjestys	84
	7.3 Yhteenveto tuloksista.....	86
8	LUOTETTAVUUS.....	90

9	POHDINTAA	93
	LÄHTEET	98
	LIITTEET	102

TAULUKOT

- Taulukko 1. Geometrian opetuksen tavoitteet opetussuunnitelmassa
- Taulukko 2. Saksalaisen piirrostutkimuksen tulokset 3.-6.-luokkalaisten oppilaiden käsityksistä geometriaa kohtaan (Kuzle ym., 2018, s. 287)
- Taulukko 3. Kroatialaisen tutkimuksen tulokset neljän alakoululaisen käsityksistä geometriaa ja geometrian opetusta kohtaan
- Taulukko 4. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden lukumäärät
- Taulukko 5. Aihealueet oppilaiden piirustuksissa luokalla A
- Taulukko 6. Aihealueet oppilaiden piirustuksissa luokalla B
- Taulukko 7. Aihealueen geometriset muodot ja niiden rakentelu (F1) sisällöt oppilaiden piirustuksissa luokalla A
- Taulukko 8. Aihealueen geometriset muodot ja niiden rakentelu (F1) sisällöt oppilaiden piirustuksissa luokalla B
- Taulukko 9. Oppilaiden piirustuksissa vähiten esiintyneet aihealueet luokalla A
- Taulukko 10. Oppilaiden piirustuksissa vähiten esiintyneet aihealueet luokalla B
- Taulukko 11. Opettajan sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla A
- Taulukko 12. Opettajan sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla B
- Taulukko 13. Oppilaiden sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla A
- Taulukko 14. Oppilaiden sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla B
- Taulukko 15. Menetelmä luokalla A
- Taulukko 16. Menetelmä luokalla B
- Taulukko 17. Oppitunnin sisältö sekä käytössä oleva opetusmateriaali luokalla A
- Taulukko 18. Oppitunnin sisältö sekä käytössä oleva opetusmateriaali luokalla B
- Taulukko 19. Järjestyksen ja käytöksen ylläpitäminen luokalla A
- Taulukko 20. Järjestyksen ja käytöksen ylläpitäminen luokalla B
- Taulukko 21. Luokkahuoneen istumajärjestys luokalla A
- Taulukko 22. Luokkahuoneen istumajärjestys luokalla B

KUVIOT

- Kuvio 1. Geometristen muotojen luokittelu (Laine & Krzywacki, 2014)
- Kuvio 2. Nollaulotteiset pisteet ja niiden merkitsemistavat
- Kuvio 3. Yksiulotteiset viivat ja kulmat
- Kuvio 4. Kaksiulotteiset tasokuviot
- Kuvio 5. Kolmiulotteiset kappaleet
- Kuvio 6. Esimerkki 3. luokkalaisten oppilaan geometriaa kuvaavasta piirustuksesta (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 7: Esimerkki 3. luokkalaisten oppilaan geometrian opetusta kuvaavasta piirustuksesta (A-luokka, tyttö)
- Kuvio 8. Esimerkki piirustuksesta, jossa esiintyy geometrisia muotoja sekä geometrisia muotoja ympäristössä (A-luokka, poika)
- Kuvio 9. Esimerkki piirustuksesta, jossa on mittaamiseen liittyviä asioita (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 10. Esimerkki piirustuksesta, jossa on geometrisia ongelmia sekä laskelmia (A-luokka, poika)
- Kuvio 11. Esimerkki piirustuksesta, jossa on erilaisia tasokuvioita ja kappaleita (A-luokka, tyttö)
- Kuvio 12. Esimerkki piirustuksesta, jossa on viivoja (A-luokka, tyttö)

- Kuvio 13. Esimerkki piirustuksesta, jossa on yhdistelmäkuviokuva (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 14. Esimerkki piirustuksesta, jossa on kulmia ja viivoja (B-luokka, poika)
- Kuvio 15. Esimerkki piirustuksesta, jossa erilaisia monikulmioita (B-luokka, poika)
- Kuvio 16. Esimerkki piirustuksesta, jossa on ympäristön geometrisia muotoja (A-luokka, poika)
- Kuvio 17. Esimerkki piirustuksesta, jossa on ympäristön geometrisia muotoja (B-luokka, poika)
- Kuvio 18. Esimerkki piirustuksesta, jossa on mittausvälineitä (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 19. Esimerkki piirustuksesta, jossa on pienennös/suurennos (A-luokka, poika)
- Kuvio 20. Esimerkki piirustuksesta, jossa on peilikuvia (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 21. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja on taululla (A-luokka, tyttö)
- Kuvio 22. Esimerkki piirustuksesta, jossa ei ole ollenkaan opettajaa (B-luokka, poika)
- Kuvio 23. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja on pöydän luona sekä tietokoneen ääressä (A-luokka, poika)
- Kuvio 24. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja esittää oppilaille matemaattisen pyynnön (A-luokka, tyttö)
- Kuvio 25. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja esittää oppilaille matemaattisen kysymyksen (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 26. Esimerkki piirustuksesta, jossa oppilaat istuvat pulpettien ääressä (A-luokka, poika)
- Kuvio 27. Esimerkki piirustuksesta, jossa on vain muutama oppilas (A-luokka, tyttö)
- Kuvio 28. Esimerkki piirustuksesta, jossa oli neljä oppilasta ympäri luokkaa (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 29. Esimerkki piirustuksesta, jossa on negatiivinen kommentti (A-luokka, tyttö)
- Kuvio 30. Esimerkki piirustuksesta, jossa on positiivisia kommentteja (B-luokka, tyttö)
- Kuvio 31. Esimerkki piirustuksesta, jossa oppilaat työskentelevät itsenäisesti (A-luokka, tyttö)
- Kuvio 32. Esimerkki piirustuksesta, jossa negatiivinen kommentti (B-luokka, poika)
- Kuvio 33. Esimerkki piirustuksesta, jossa negatiivisia kommentteja (B-luokka, poika)
- Kuvio 34. Esimerkki piirustuksesta, jossa oppitunnin sisältö näkyy taululla ja oppilaiden tekeminen vastaa sisältöä (A-luokka, poika)
- Kuvio 35. Esimerkki piirustuksesta, jossa on Suomen kartta seinällä (B-luokka, poika)
- Kuvio 36. Esimerkki piirustuksesta, jossa on luokanopettaja sekä erityisopettaja (B-luokka, tyttö)

1 Johdanto

Geometria on pitkään ollut yksi matematiikan opetuksen tärkeimmistä osa-alueista kaikkialla maailmassa, koska sen avulla oppilas oppii ymmärtämään muotoja sekä niiden ominaisuuksia (Jones, 2000, s. 75-82). Viimeisten vuosikymmenien aikana geometrian opetusta on kuitenkin vähennetty monissa maissa ja se näkyy myös kansallisissa matematiikan opetussuunnitelmissa (Mammana & Villani, 1998, s. 3-4). Sen lisäksi, että geometrian opetusta on vähennetty, sen suunta on edelleen väheneviin päin geometrian opetuksen tärkeydestä huolimatta. Tämän johdosta on herännyt kysymys, millaiset valmiudet oppilaat saavat geometrian opetuksen myötä. (Kuzle, Glasnović Gracin & Klunter, 2018, s. 283.)

Suomessa geometrian osuus matematiikan opetuksessa on vaihdellut peruskoulun olemassaolon aikana sekä ennen peruskoulujärjestelmään siirtymistä. Suomen kouluhistorian aikana geometrian määrä opetuksessa on käynyt läpi laskuja ja nousuja, ollen ennen peruskoulujärjestelmää myös oma oppiaineensa keskikoulun kolmannelta luokalta alkaen. Tällöin geometria vei suuren siivun matematiikan oppitunneista ja kuului keskeisimpiin sisältöalueisiin matematiikan opetuksessa. Vaikka geometrian opetuksen määrä ja sisältöalueiden painotukset ovat vaihdelleet vuosikymmenten saatossa, on se vakiinnuttanut paikkansa osaksi Suomen peruskoulun matematiikan opetusta. (Silfverberg, 1999, s. 17.)

Nykyään geometrialla on tärkeä rooli peruskoulun matematiikan opetuksessa. Sen opetus alkaa ensimmäisellä vuosiluokalla ja jatkuu yläkoulun loppuun saakka. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, s. 129, 236, 376) geometrialle on varattu oma sisältökohtansa jokaisella luokka-asteella. Alakoulussa geometrian opetukseen sisältyy monien tärkeiden taitojen harjoittelua, joista esimerkkeinä geometrinen muotojen luokittelu, nimeäminen, mittaamien sekä kolmiulotteisen ympäristön hahmottaminen. Taitojen lisäksi geometrian opetukseen kuuluvat olennaisena osana matemaattiset käsitteet, kuten tasogeometria, kappaleet ja symmetria sekä käsitteiden oikeaoppinen käyttö. (POPS, 2014, s. 129 ja 136.)

Tutkielmani perustuu saksalaisen Ana Kuzlen ”Draw Me Emma”- nimiseen tutkimushankkeeseen, jossa tutkitaan oppilaiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta. Hankkeen parissa on toteutettu piirrostutkimus kolmas-, neljäs-, viides- ja kuudesluokkalaisten oppilaiden käsityksistä geometriaa kohtaan sekä pilottitutkimus neljän kroatialaisen oppilaan käsityksistä geometriaa ja geometrian opetusta kohtaan. Tutkimuksien tuloksista on julkaistu artikkeleita, joita käsittelen myös tutkielmassani. Parhaillaan Saksassa on käynnissä laajempi tutkimus oppilaiden geometrian opetusta koskevista käsityksistä. Aihetta tutkitiin ja tutkitaan edelleen oppilaiden tekemien piirustuksien sekä niiden pohjalta toteutettujen puolistrukturoitujen haastatteluiden avulla. (Kuzle, Glasnović Gracin, & Klunter, 2018; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018.) Tutkielmani on yksinkertaistettu jatkotutkimus alkuperäisestä tutkimuksesta. Toteutan tutkielmani pienemmällä oppilasmäärällä sekä jätän haastattelu osion tutkielman ulkopuolelle rajatakseni aiheen Pro gradu- tutkielmalle mitoitetuksi. Seuraan tutkijalta Ana Kuzlelta saatuja ohjeita aineiston keräämisessä sekä analysoimisessa.

Oppilaiden geometriaa ja sen opetusta koskevien käsityksien tutkiminen on kiinnostavaa koska, yleistä älykkyyttä mittaavissa testeissä korostuu matemaattisen sekä erityisesti geometrinen ajattelun tärkeys. Testit sisältävät muun muassa numeroita, muotoja, kuvioden luokittelua, peilausta, siirtoa, kiertoa ja sarjoittamista. Testeillä mitataan älykkyyttä, mutta tehtävillä on vahva yhteys matematiikkaan. Matematiikalla voidaanakin nähdä olevan merkittävä rooli ajattelun kehityksessä. Erityisesti geometrian painotus testeissä nousee esille, mikä kertoo geometrian tärkeydestä. (Malaty, 1997, s. 116-117.)

Tässä pro gradu- tutkielmassa tutkin kolmasluokkalaisten oppilaiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta piirrostutkimuksen keinoin. Tarkastelen oppilaiden käsityksiä luokkakohtaisesti sekä vertailemalla luokkia keskenään. Tutkielman tavoitteena on selvittää, minkälaisia oppilaiden käsitykset ovat sekä korostuuko käsityksissä jokin tietty geometrian sisältö.

2 Geometria

Tässä luvussa esittelen geometrian perusteita, sen taustaa ja käsitteitä sekä koulugeometriaa. Lähdän liikkeelle geometrian historiasta, jota hyödynnän käsitteiden määrittelyssä sekä koulugeometrian käsittelyssä. Teorialuvun keskiössä ovat geometrian perusteet sekä erityisesti geometria alakoulukontekstissa.

2.1 Geometrian historia

Sana geometria on peräisin kreikankielestä ja tarkoittaa alkuperäiseltä merkitykseltään maanmittausta. Geometrian kehitys lähti liikkeelle käytännön mittaustehtävistä sekä arkipäivän elämään liittyvistä ongelmista. Esimerkiksi Egyptissä ihmiset hyödynsivät geometriaa pyramidien rakentamiseen. Myöhemmin geometriasta kehittyi matematiikan osa-alue ja oma tieteenalansa antiikin kreikkalaisten toimesta. (Väisälä, 1959, s. 1; Kurittu, Hokkanen & Kahanpää, 2006, s. 2; Lehtinen, Merikoski, Tossavainen, 2007, s.7.) Geometrian avulla pystyttiin mallintamaan ympäröivää maailmaa ja sitä voidaan pitää yhtenä ensimmäisistä matemaattisista keinoista tilan sekä avaruuden mallintamiseen. Myös nykyään geometriaa käytetään samaan tarkoitukseen. (Lehtinen, 2011, s. 3.)

Tunnetuin ja geometrian kannalta merkittävin kreikkalainen matemaatikko oli Eukleides Aleksandrialainen. Hän julkaisi kolmetoistaosaisen teoksen, Alkeet, johon on koottu kreikkalaista geometriaa ja sen aikaista matemaattista tietämystä luvuista (n. 300 eKr.) (Kurittu ym., 2006, s. 2.) Teoksessa geometria kuvattiin systemaattisena rakenteena, jossa geometrisen tiedon palasista rakentui kokonaisuus. Kokonaisuuden lähtökohtana olivat peruskäsitteet piste, suora ja taso. Näiden kolmen peruskäsitteen välillä vallitsevia yhteyksiä kutsuttiin nimellä aksioomat eli perusoletukset. Peruskäsitteiden ja aksiomien pohjalta määriteltiin uusia käsitteitä, joiden avulla pystyttiin todistamaan lauseita ja rakentamaan edelleen uusia yhteyksiä käsitteiden välille. Teos muodosti pohjan euklidiselle geometrialle ja kuului keskeisesti geometrian opetukseen vielä 1800-luvulle asti niin ulkomailla kuin Suomessa. (Kurittu ym., 2006, s. 2; Kahanpää, 2011, s. 1 ja 7-8.) Kahanpään (2011, s. 1) mukaan Eukleideen Alkeet-teoksen asema koulugeometriassa säilyi pisimpään Suomessa parin muun maan lisäksi. Lehtinen ja

muut (2007, s. 8) puolestaan toteavat, että geometria on laajentumisen myötä ajautunut kauas Eukleideen geometriasta, mutta siitä huolimatta Eukleideen geometria on säilynyt geometrian opiskelun perustana. Näiden pohjalta voidaan todeta, että Eukleideen geometria on luonut pohjan koulugeometrialle.

Euklidisestä geometriasta löytyy myös tuoreempia aksioomajärjestelmiä, joista tunnetuin on saksalaisen David Hilbertin. Hilbertin vuonna 1902 julkaisema järjestelmä on huomattavasti täsmällisempi, laajempi sekä monimutkaisempi, kuin Eukleideen. Tämän johdosta Hilbertin aksioomajärjestelmä sopii paremmin nyky-matematiikkaan. (Kurittu ym., 2006, s. 7.) Lehtinen ja muut (2007, s. 7) toteavatkin, että tarve täsmällisemmälle järjestelmälle nousi, kun Eukleideen aksioomajärjestelmässä havaittiin puutteita sekä tarkentamisen varaa. Hilbertin aksioomajärjestelmää voidaan kutsua parannetuksi versioksi Eukleideen vastaavasta, minkä johdosta nykyään käytössä oleva aksioomajärjestelmä on Hilbertin käsialaa, mutta pohjautuu Eukleideen esittämään järjestelmään (Kahanpää, Högmänder ja Hannukainen, 1996, s. 9). Eukleideen järjestelmän tavoin myös Hilbertin aksioomajärjestelmä rakentuu peruskäsitteiden varaan. Hilbertin järjestelmässä peruskäsitteitä ei kuitenkaan määritellä eksplisiittisesti eli suoraan vaan järjestelmä määrittelee ne epäsuorasti aksioomien kautta (Kurittu ym., 2006, s. 9; Lehtinen ym., 2007, s.7.)

Geometria voidaan jakaa euklidiseen sekä epäeuklidiseen geometriaan. Nykyään euklidiseksi geometriaksi lasketaan Hilbertin aksioomajärjestelmän mukainen geometria. Jos geometria ei noudata aksioomajärjestelmää, on kyseessä epäeuklidinen geometria. Euklidisessa geometriassa pisteet ja suorat ovat tasolla, kun taas epäeuklidisessa ne ovat kaarevalla pinnalla, kuten pallolla. (Kahanpää ym., 1996, s. 9-11; Nevanlinna, 1973, s. 6-7.) Yksi euklidisen geometrian aksioomista on paralleeliaksioma. Paralleeliaksioman mukaan suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää täsmälleen yksi kyseisen suoran suuntainen suora. Jos tämä aksiooma ei toteudu, on kyseessä epäeuklidinen geometria. (Hansen, 1998, s. 13; Kurittu ym., 2006, s. 5.)

2.2 Geometria alakoulussa

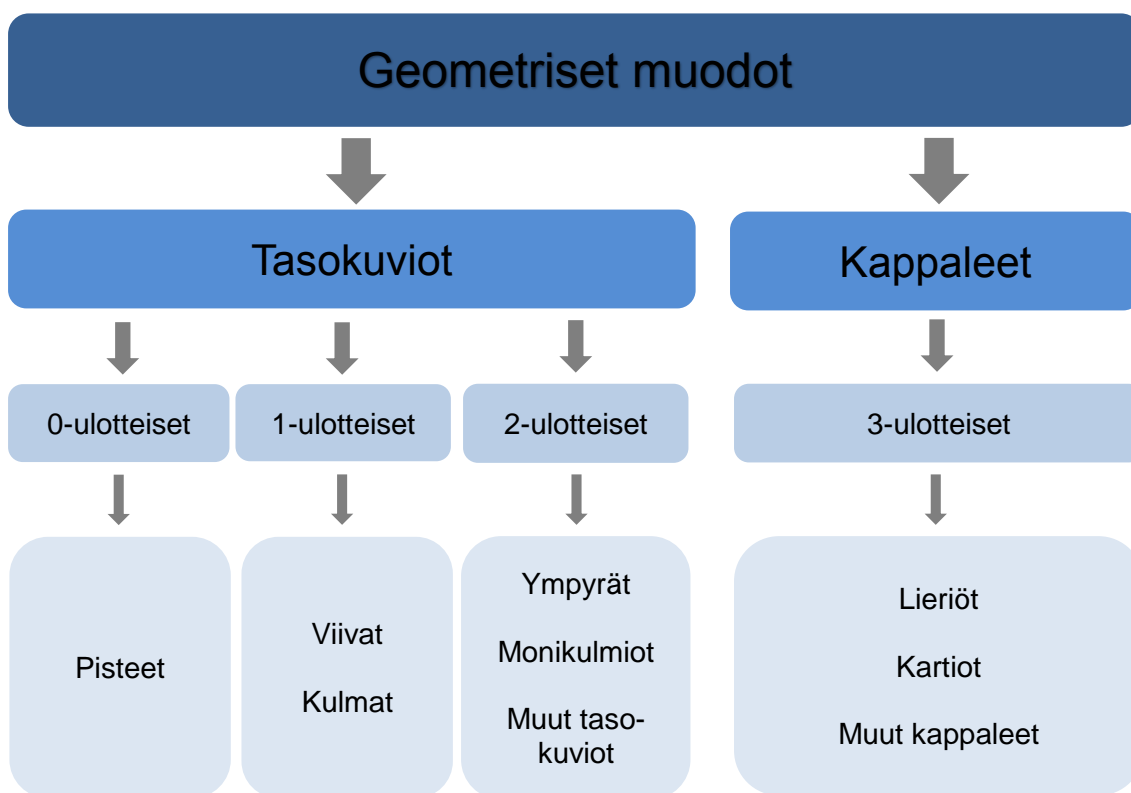
Tutkielmani kannalta ei ole olennaista esitellä kahta edellä mainittua aksioomajärjestelmää tarkemmin, vaan keskittyä alakoulun geometriassa käytettäviin keskeisiin käsitteisiin. Käsitteiden määrittelyssä hyödynnän Eukleideen sekä Hilbertin aksioomajärjestelmiä. Edellä todettiin, että geometria on systemaattista ja sen lähtökohtana ovat peruskäsitteet, joiden varaan kerrostuu uusia käsitteitä ja käsitteiden välisiä yhteyksiä. Geometrian systemaattisuus ja ajattelun kerroksellisuus näyttäytyy myös alakoulun geometriassa, erityisesti käsitteenmuodostuksessa (Silfverberg, 2018, s. 86).

Alakoulussa geometria on osa matematiikan opetusta (POPS, 2014, s. 128-130 ja 234-237). Koulugeometrian myötä oppilas tulee tietoiseksi geometrian peruskäsitteistä sekä oppii jäsentämään ympäristön tilasuhteita niiden avulla. Koulugeometriassa oppilas työskentelee monien käsitteiden parissa, joista esimerkkeinä piste, suora, tasokuvio, avaruuskuvio sekä yhdensuuntaisuus. Näiden lisäksi oppilas harjoittelee erilaisten suureiden kuten pituuksien, kulmien suuruuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien käyttöä. Avaruudellisen ajattelun harjoittelussa hyödynnetään laskennallisia keinoja sekä konkreettisia apuvälineitä kuten mallikappaleita, karttoja ja kaavioita. (Silfverberg, 2018, s. 87.) Geometrian opetus tarjoaa oppilaalle siis työkaluja spatiaaliseen eli avaruudelliseen ajatteluun, johon koulugeometria perustuu. Keskeistä koulugeometriassa ovat avaruudelliset tilasuhteet sekä niiden hahmottaminen. (Clements & Battista, 1992, s. 420; Silfverberg, 2018, s. 87.)

Geometria ja tämän myötä koulugeometria perustuu geometrian peruskäsitteisiin sekä niiden varaan rakentuvaan käsitejärjestelmään. Hierarkkinen ja aksioomiin perustuva käsitejärjestelmä muodostaa koko geometrian ytimen. Aksioomilla tarkoitetaan matemaattisia perusoletuksia, joita voidaan pitää totena ilman perusteita. Aksioomat sekä käsitteet ovat välttämättömiä geometrian parissa toimiessa. (Risku, 2002, s. 118 ja 136.) Esittelen seuraavaksi alakoulun geometrian opetuksessa käytettävät geometrian peruskäsitteet keskittyen tutkielmani kannalta olennaisimpiin.

2.3 Geometrian peruskäsitteet

Geometrian käsitteiden määrittelyssä hyödynnän Lauri Kahanpään (2011) kirjoittamaa teosta ”Kuusi ensimmäistä kirjaa Eukleideen Alkeista, eli Tasogeometria”. Kahanpään teoksen rinnalla käytän Lassi Kuritun, Veli-Matti Hokkasen sekä Lauri Kahanpään (2006) teosta nimeltä Geometria, josta löytyy Hilbertin aksiomajärjestelmän mukaisia käsitteiden määritelmiä. Näiden lisäksi hyödynnän Kalle Väisälän (1959) teosta nimeltä Geometria sekä Matti Lehtisen, Jorma Merikosken ja Timo Tossavaisen (2007) Johdatus tasogeometriaan-teosta. Näiden ohella käytössäni on myös Anna-Maija Riskun (2002) kirjoittama artikkeli Leikisti ja oikeesti- Oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien, Kahanpään (2002) kolmas teos, jonka hän on tehnyt Ossi Kankaan kanssa matematiikasta alkuopettajille sekä luokanopettaja opintojen ensimmäisellä vuosikurssilla suoritettua matematiikan didaktiikan kurssin opetusmoniste, jonka on tehnyt Anu Laine sekä Heidi Krzywacki (2014). Lähden käsitteiden määrittelyssä liikkeelle geometrysten muotojen luokittelusta, jota on havainnollistettu alla olevassa kuviossa 1.

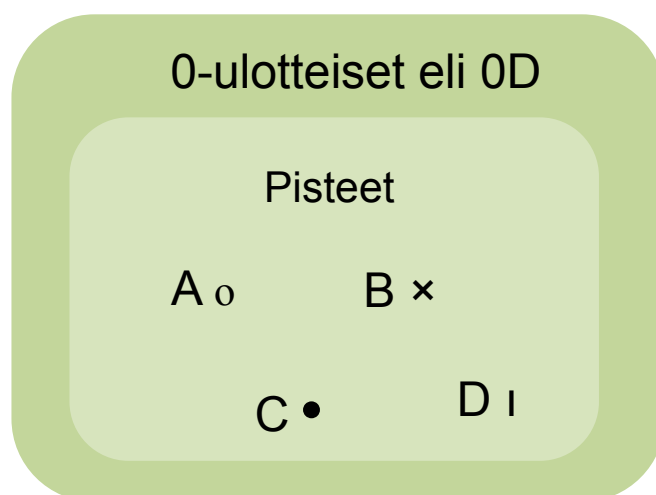


Kuvio 1. Geometrysten muotojen luokittelu (Laine & Krzywacki, 2014)

Kuviossa 1 geometriset muodot ovat luokiteltu ulottuvuuksien mukaan. Kuviosta huomataan, että geometriset oliot voidaan jakaa tasokuvioihin ja kappaleisiin. Tasokuvioiden sisällä kuviot voidaan edelleen jakaa ulottuvuuksien lukumäärän mukaan nolla-, yksi- ja kaksiulotteisiin kuvioihin. Nollaulotteisiin tasokuvioihin kuuluvat erilaiset pisteet, yksiulotteisiin viivat sekä eri suuruiset kulmat ja kaksiulotteisiin ympyrät, monikulmiot sekä jäljelle jäävät muut kaksiulotteiset kuviot. Kappalet ovat kolmiulotteisia geometrisia olioita ja ne voidaan luokitella lieriöihin, kartioihin sekä muihin jäljelle jääviin kappaleisiin, jotka eivät lukeudu kahteen ensimmäiseen. (Laine & Krzywacki, 2014; Wittmann, 1999, s. 205-223; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 33-34.)

Piste

Geometrian käsitejärjestelmä lähtee liikkeelle pisteen käsitteestä, jota voidaan pitää geometrian alkutekijänä. Pisteen määritelmän mukaan sillä ei ole ulottuvuutta, osia eikä läpimittaa eli se on nollaulotteinen. Pisteen määritelmä on samalla yksi geometrian aksioomista. (Risku, 2002, s. 118 ja 136-137; Kahanpää, 2011, s. 7.) Väisälä (1959, s.1) lisää pisteen määritelmään vielä pisteen nimeämisen. Nimeämisessä voidaan hyödyntää neljää erilaista merkitsemistapaa, jotka ovat havainnollistettu kuviossa 2.



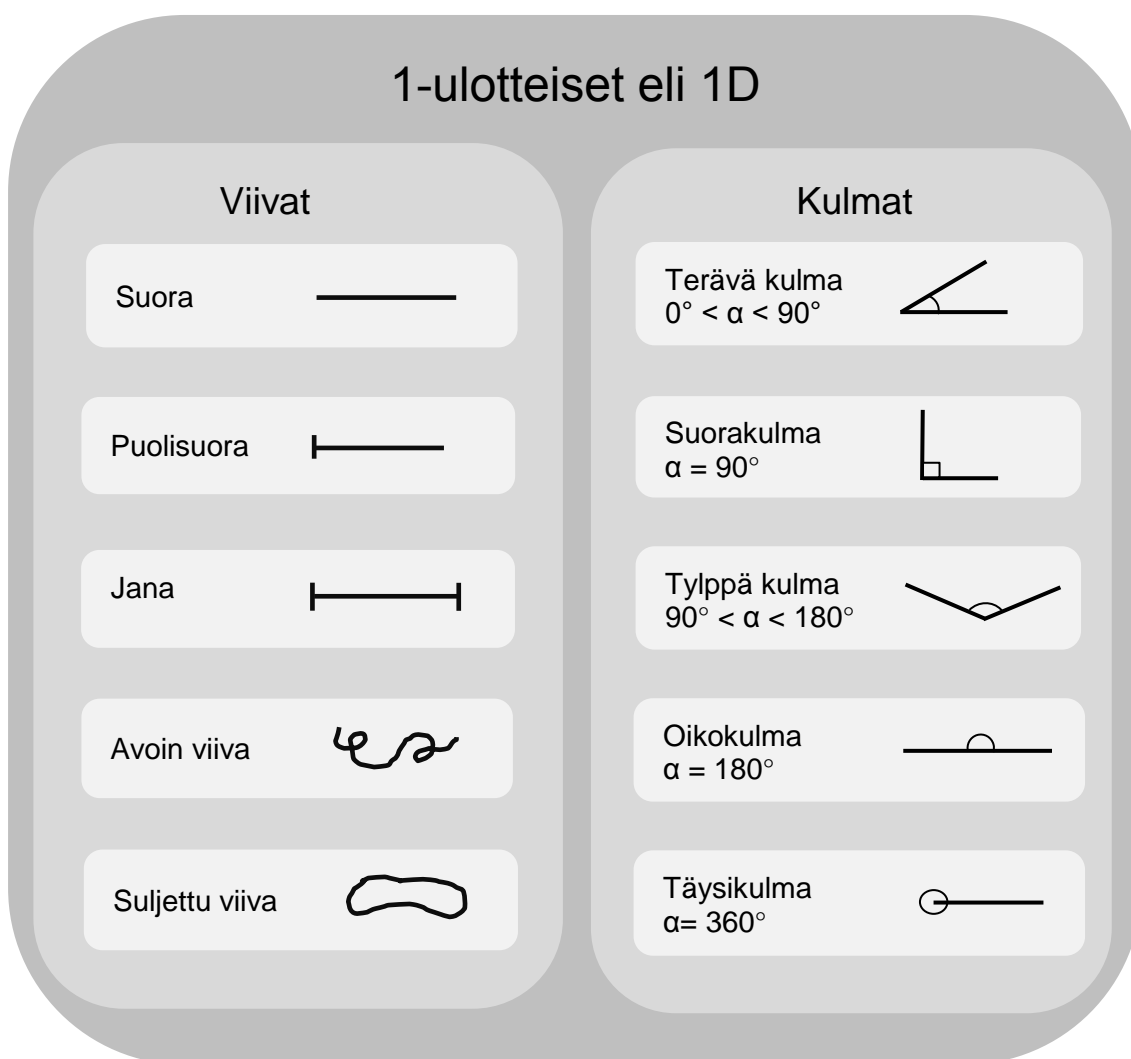
Kuvio 2. Nollaulotteiset pisteet ja niiden merkitsemistavat

Kuvioon 2 on koottu Väisälän (1959, s.1) esittelemät pisteen merkitsemistavat, joista ensimmäinen on pieni piste (\bullet), toinen rengas (o), kolmas risti (\times) ja neljäs

pieni viiva (l). Viimeistä merkitsemistapaa eli pientä viivaa käytetään yleensä, kun piste sijaitsee viivalla.

Viivat ja kulmat

Yksiulotteisiin kuvioihin kuuluvat viivat ja kulmat, jotka ovat koottu kuvioon 3. Kuvio ei sisällä kaikkia olemassa olevia viivoja ja kulmia vaan vain ne, joita tarvitaan tutkielman tulosten esittelyosioissa oppilaiden piirustuksien pohjalta. Kuvion ulkopuolelle jäävät esimerkiksi murtoviiva, nollakulma sekä kupera kulma. (Laine & Krzywacki, 2014.)



Kuvio 3. Yksiulotteiset viivat ja kulmat

Seuraavaksi esittelen kuviossa 3 esiintyvät käsitteet tarkemmin, aloittaen viivoista. Liikkuvasta pisteestä jää jäljeksi yksiulotteinen viiva. Eukleideen alkeissa

viiva on määritelty pituudeksi ilman leveyttä. (Kahanpää, 2011, s. 7; Väisälä, 1959, s.1.) Jos viiva kulkee mutkittelematta kahden tunnetun pisteen kautta, kutsutaan sitä suoraksi. Suoralla ei ole määrättyä alku- eikä päätepistettä. Sen sijaan, jos alkupiste tiedetään, on kyseessä puolisuora. Puolisuora muuttuu jaksaksi, kun myös päätepiste on tunnettu. Viiva voi olla avoin tai suljettu. Suljetussa viivassa, sekä alku- että päätepiste ovat samat, jolloin viiva on yhtenäinen. Sen sijaan avoimessa viivassa näin ei ole. (Risku, 2002, s. 136-137; Kahanpää, 2011, s. 7; Väisälä, 1959, s.2; Laine & Krzywacki, 2014.) Viivojen yhteydessä tärkeiksi käsitteiksi nousevat myös suorien yhdensuuntaisuus sekä symmetria suoran suhteen. Kaksi suoraa ovat keskenään yhdensuuntaiset, jos ne sijaitsevat samassa tasossa ja ovat aina yhtä kaukana toisistaan. Tällöin suorilla ei ole ollenkaan yhteisiä pisteitä. (Kahanpää, 2011, s. 10; Väisälä, 1959, s. 18.) Geometriset kuviot voivat olla symmetrisiä suoran suhteen. Tällöin kummankin kuvion toisiaan vastaavat pisteet ovat yhtä kaukana suorasta, jonka suhteen kuviot ovat symmetrisiä keskenään. Suoran suhteen symmetrisiä kuvioita kutsutaan myös peilikuviksi. (Väisälä, 1959, s. 31.)

Viivojen lisäksi yksiulotteisiin kuvioihin kuuluvat myös kulmat. Kulma muodostuu kahdesta puolisuorasta, joiden alkupisteet ovat samat muodostaen näin kulman kärjen. Kulma on näiden kahden puolisuoran väliin jäävä tason alue. Puolisuoria kutsutaan kulman kyljiksi. Kulman kärjestä katsottuna kyljet voidaan nimetä oikeaksi ja vasemmaksi kyljeksi. (Risku, 2002, s. 137; Kahanpää, 2011, s. 9; Väisälä, 1959, s.8.) Tässä vaiheessa voidaan jo huomata geometrian peruskäsitteiden välillä vallitsevia riippuvuussuhteita. Risku (2002, s. 117) kuvailee artikkelissaan, kuinka geometrian käsitteet ovat kytköksissä toisiinsa. Tästä esimerkkinä kulman määrittely, jossa tarvitaan puolisuoran määritelmää ja, jossa puolestaan tarvitaan pisteen määritelmää eli aksioomaa. Geometrian hierarkkinen rakenne näkyy heti ensimmäisistä käsitteistä lähtien, kun uusia käsitteitä määritellään aiemmin määriteltyjen käsitteiden avulla ja kaikkien käsitteiden taustalla on pisteen aksiooma. (Risku, 2002, s. 117-118 ja 136.)

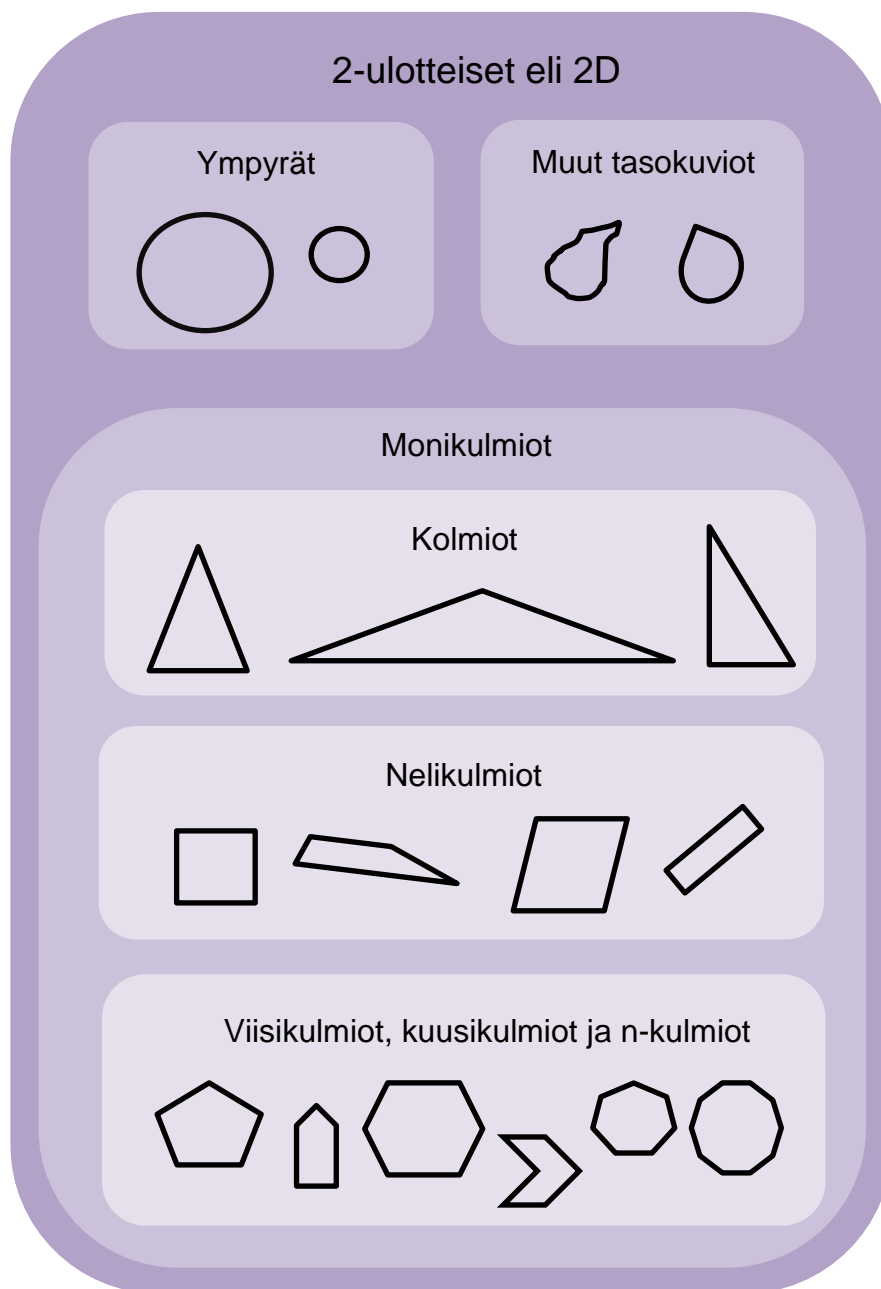
Viivojen tapaan, myös kulmia on erilaisia. Tutkielmassa tarvittavat kulmat sekä niiden kuvat ja suuruudet asteina löytyvät kuviosta 3. Suorakulma muodostuu, kun suora leikkaa toisen suoran niin, että muodostuu kaksi yhtä suurta kulmaa.

Jos kulma on suurempi kuin suorakulma, on kyseessä tylppäkulma. Sen sijaan pienempää kuin suorakulma kutsutaan teräväksi kulmaksi. Eukleideen alkeissa ei käytetty kulman suuruutta ilmaisevia asteita kulman määritelmässä eikä suoran-, tylpän- ja terävän kulman ohella esitelty muita kulmia. (Kahanpää, 2011, s. 9-10; Väisälä, 1959, s.11; Kurittu ym., 2006, s. 4.) Koulugeometriassa asteet sekä muut olemassa olevat kulmatyypit ovat kuitenkin olennaisia. Täysikulmalla tarkoitetaan kulmaa, jossa kulman kyljet menevät päällekkäin muodostaen vain yhden puolisuoran. Oikokulmaksi kutsutaan kulmaa, jossa kyljet muodostavat yhdessä kokonaisen suoran. Suorakulma voidaan määritellä myös puolikkaaksi oikokulmaksi. (Väisälä, 1959, s. 10.)

Väisälä (1959, s.13) esittelee teoksessaan myös kulmien suuruuden astelukujen avulla. Täysikulma on 360 astetta, oikokulma 180 astetta ja suorakulma 90 astetta. Aiemmin todettiin, että terävä kulma on pienempi kuin suorakulma, joten terävän kulman asteluku on oltava pienempi kuin 90 astetta. Tylppä kulma on puolestaan suurempi kuin suorakulma, jolloin sen astelukukin on suurempi kuin 90 astetta. Asteen määritelmässä tarvitaan ympyrän määritelmää. Määrittelen asteen myöhemmin ympyrän määritelmän yhteydessä. (Väisälä, 1959, s.13.)

Tasokuviot

Tässä vaiheessa, ennen kaksiulotteisiin kuvioihin siirtymistä, tärkeäksi käsitteeksi nousee tason ja kuvion määritelmät. Eukleideen alkeissa sekä Väisälän teoksessa taso määritellään pinnan käsitteen kautta. Pinta rakentuu pituudesta sekä leveydestä ja sitä kutsutaan tasoksi, jos näiden ominaisuuksien jatkuvuutta ei ole rajoitettu. Taso on siis tasainen pinta, joka jatkuu leveys- ja pituussuunnissa rajattomasti. (Kahanpää, 2011, s.8; Väisälä, 1959, s.4.) Väisälä kertoo teoksessaan, että geometria jaetaan tasogeometriaan sekä avaruusgeometriaan. Jako perustuu tason määritelmään. Tasogeometriassa tutkitaan kuvioita, joiden kaikki pisteet sijaitsevat samassa tasossa, mistä seuraa, että kuviot ovat kokonaan samassa tasossa. (Väisälä, 1959, s.4.) Tason määritelmään kautta päästään kuvioihin, jotka tason tavoin muodostuvat pituudesta sekä leveydestä. (Väisälä, 1959, s.4.) Eukleideen alkeissa kuvio määritellään reunoilla eli viivoilla rajoitetuksi ti-laksi (Kahanpää, 2011, s.10). Kuvioon 4 on koottu tutkielmassa tarvittavat kaksiulotteiset tasokuviot.



Kuvio 4. Kaksiulotteiset tasokuviot

Kuviosta 4 nähdään, että kaksiulotteiseen maailmaan kuuluvat ympyrät, monikulmiot sekä näiden ulkopuolelle jäävät muut tasokuviot. Monikulmiot voidaan edelleen jakaa kolmioihin, nelikulmioihin, viisikulmioihin, kuusikulmioihin ja n-kulmioihin eli kuvioihin, joissa on tässä tapauksessa enemmän kuin kuusi kulmaa. Kolmioit ja nelikulmiot voidaan jakaa vielä ominaisuuksien mukaan erilaisiin kuvioihin. (Kahanpää, 2011, s.10-13; Väisälä, 1959, s.4-5; Kahanpää & Kangas, 2002, s.51-57; Laine & Krzywacki, 2014.)

Ympyrä on tasokuvio, jossa kaikki kuvion keskeltä reunaviivalle eli tässä tapauksessa ympyräviivalle piirretyt janat ovat yhtä pitkiä. Tätä ympyrän keskellä olevaa pistettä kutsutaan ympyrän keskipisteeksi. Ympyräviivaa, joka muodostaa rajat ympyrälle, sanotaan myös ympyrän kehäksi. Keskipisteestä kehälle piirretyjä viivoja nimitetään ympyrän säteiksi. Halkaisija puolestaan on ympyrän keskipisteen kautta kehältä kehälle kulkeva jana, joka leikkaa ympyrän tasan puoliksi. Tällaiset suorat viivat, joiden alku- ja päätepisteet sijaitsevat ympyrän kehällä ovat nimetty jäniteiksi. Toisin sanoen myös halkaisija on jänne, jonka ehtona on lisäksi keskipisteen kautta kulkeminen. (Kahanpää & Kangas, 2002, s.56; Kahanpää, 2011, s.10-11; Väisälä, 1959, s.5; Kurittu ym., 2006, s. 3.) Väisälän (1959, s. 5) mukaan ympyräviivaa voidaan pitää yksinkertaisimpana sekä tärkeimpänä käyristä viivoista. Hän kertoo samassa yhteydessä, että ympyrä nimetään usein keskipisteen mukaan. Eli keskipisteen nimi toimii samalla myös ympyrän nimenä.

Monikulmiot ovat kuvioita, joita rajoittavat suorat viivat. Rajoittavien viivojen lukumäärä kertoo monikulmion nimen. Jos viivoja on kolme, on kyseessä kolmisivuinen monikulmio eli kolmikulmio eli kolmio. Nelisivuista monikulmiota kutsutaan taas nelikulmioksi. Samalla tavalla määritellään myös viisikulmiot, kuusikulmiot ja n-kulmiot. (Kahanpää, 2011, s.11-12.) Sivujen lukumäärä kertoo myös sen, kuinka monta kulmaa ja kärkeä monikulmiosta löytyy. Kolmiossa on kolmen sivun lisäksi kolme kulmaa ja kolme kärkeä. Samaan tapaan nelikulmiossa on neljän sivun ohella neljä kulmaa sekä neljä kärkeä. Sama toistuu kaikissa monikulmioissa tästä eteenpäin. (Kahanpää & Kangas, 2002, s. 51 ja 53.)

Monikulmioissa kulmat aukeavat kuvion sisälle päin ja kulmien kärkipisteet toimivat kuvion kärkinä, mistä voidaan myös päätellä näiden lukumäärän olevan sama (Väisälä, 1959, s.22). Monikulmioita voidaan luokitella sivujen pituuksien sekä kulmien suuruuksien mukaan. Jos monikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, kutsutaan sitä tasasivuiseksi. Jos puolestaan kaikki kulmat ovat yhtä suuria, kutsutaan sitä tasakulmaiseksi. Jos monikulmio täyttää molemmat ehdot, ollen sekä tasasivuinen että tasakulmainen, kutsutaan sitä säännölliseksi monikulmioksi. Esimerkkejä säännöllisistä monikuvioista ovat neliö sekä tasasivuinen kolmio, jotka esitellään seuraavaksi. (Kahanpää, 2011, s.12; Kahanpää & Kangas, 2002, s.53.)

Kolmio on yksinkertaisin kaikista monikulmioista, koska sen sivujen, kulmien ja kärkien lukumäärä on pienin. (Kahanpää & Kangas, 2002, s.53). Kolmiot voidaan luokitella kahdella eri tavalla. Ensimmäisessä tavassa kolmiot luokitellaan kulmien mukaan ja toisessa sivujen mukaan. Kulmien mukaan luokittelu kattaa kaikki kolmiot, mutta sivujen mukaan tapahtuva luokittelu ei. Tämän johdosta kaikille kolmioille ei löydy täsmällisempää nimeä luokiteltaessa sivujen perusteella.

Luokittelu kulmien mukaan:

1. Suorakulmainen kolmio = yksi suora kulma
2. Tylppäkulmainen kolmio = yksi tylppä kulma
3. Teräväkulmainen kolmio = kaikki kulmat teräviä

Luokittelu sivujen mukaan:

1. Tasakylkinen kolmio = vähintään kaksi yhtä pitkää sivua
2. Tasasivuinen kolmio = kaikki sivut yhtä pitkiä

Kolmioista tiedetään myös se, että kolmion kulmien summa on 180 astetta. Tasasivuisessa kolmiossa kaikki kulmat ovat yhtä suuria eli 60 asteisia. Sen sijaan tasakylkisestä kolmiosta löytyy vain kaksi yhtä suurta kulmaa. (Kahanpää, 2011, s.12; Kahanpää & Kangas, 2002, s. 54-55; Väisälä, 1959, s. 23-26; Laine & Krzywacki, 2014.)

Nelikulmiot voidaan luokitella suunnikkaisiin, puolisuunnikkaisiin, suorakulmioihin ja neliöihin. Näiden ulkopuolelle jäävät vielä ne nelikulmiot, jotka eivät täytä tämän luokittelun edellyttämiä ehtoja. Ulkopuolelle jäävistä nelikulmioista ei löydy vähintään kahta yhdensuuntaista sivua, jolloin luokittelun vähimmäisvaatimus täyttyisi ja kyseessä olisi puolisuunnikas. Nelikulmioista tiedetään myös se, että kulmien summa on 360 astetta. Tästä seuraa se, että nelikulmion kaikki kulmat ovat 90 astetta, jos ne ovat täsmälleen yhtä suuret keskenään. Alla olevasta luokittelusta ilmenee kuvioden sisäkkäisyys, minkä vuoksi seuraava kuvio täyttää aina edeltävän kuvion ehdot. Tämän johdosta suorakulmio on suunnikkaan erikoistapaus ja neliö suorakulmion erikoistapaus. (Kahanpää, 2011, s. 13; Kahanpää & Kangas, 2002, s. 51-53; Väisälä, 1959, s. 22; Laine & Krzywacki, 2014.)

Nelikulmioiden luokittelu sivujen ja kulmien perusteella:

1. Puolisuunnikas

- kaksi vastakkaista sivua ovat yhdensuuntaiset

2. Suunnikas

- vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset
- vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät
- vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret

3. Suorakulmio

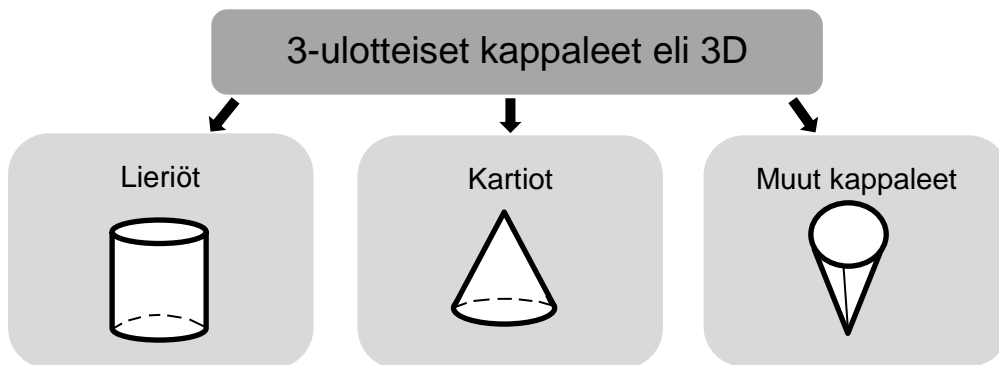
- vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset
- vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät
- kaikki kulmat ovat yhtä suuret

4. Neliö

- vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset
- kaikki sivut ovat yhtä pitkät
- kaikki kulmat ovat yhtä suuret

Kappaleet

Laineen & Krzywackin (2014) mukaan kappaleet voidaan jakaa lieriöihin, kartioihin ja muihin kappaleisiin. Kappaleiden jakoa on havainnollistettu alla olevassa kuviossa 5.



Kuvio 5. Kolmiulotteiset kappaleet

Kuviosta 5 nähdään, että lieriö on kappale, jossa kaksi keskenään samanlaista sekä yhdensuuntaista tasokuviota muodostavat yhdessä kaksi pohjaa, jotka yhdistyvät toisiinsa vaipalla. Kahanpään ja Kangaksen (2002, s. 58) mukaan lieriön vaippa on suorakulmion muotoinen, jos se levitetään tasoon. Kartiot ovat muuten samanlaisia kuin lieriöt, mutta niissä pohjia on vain yksi. Tästä seuraa, että vaippa

ei myöskään ole suorakulmion muotoinen. Molemmat edellä esitellyistä kappaleista voivat olla joko suoria tai vinoja. Muihin kappaleisiin kuuluvat ne kappaleet, jotka eivät kuulu lieriöihin tai kartioihin. Näistä esimerkkeinä pallo ja jäätelötötterö, joka löytyy kuviosta 5 (Laine & Krzywacki, 2014; Kahanpää & Kangas, 2002, s. 57-58.)

Sekä lieriöille että kartioille löytyy oma nimitys, jos pohjat muodostuvat monikulmioista. Tällöin lieriötä kutsutaan särmiöksi ja kartiota pyramideiksi (Laine & Krzywacki, 2014.) Särmiöt ja pyramidit kuuluvat monitahokkaisiin, joka tarkoittaa monikulmioista muodostuvaa kappaletta. Myös lieriöiden ja kartioiden ulkopuolelle jäävistä muista kappaleista löytyy monikulmioista muodostuvia kappaleita. Näitä kutsutaan muiksi monitahokkaiksi. (Laine & Krzywacki, 2014; Väisälä, 1959, s. 157.)

3 Geometrian opetus alakoulussa

Tässä luvussa esittelen alakoulun geometrian opetusta opetussuunnitelman sekä geometrian opetuksen rakenteen pohjalta. Rakenteen esittelyssä hyödynnän geometrian opetuksen perusajatuksia sekä geometrialle ominaista ajattelutapaa. Lopuksi tarkastelen vielä geometrian oppimista sekä oppilaiden käsityksiä geometrian opetusta kohtaan aiemman tutkimuksen pohjalta. Lähden liikkeelle geometrian opetuksen lähestymistavoista, joiden jälkeen siirryn geometrian opetuksen rakenteeseen.

3.1 Lähestymistavat geometrian opetukseen

Tähän mennessä olen esitellyt alakoulun geometrian opetuksen keskeisimmät käsitteet, joiden parissa oppilaat työskentelevät. Käsitteet sekä kaikki geometrian parissa tapahtuva toiminta muodostavat koulugeometrian. Koulugeometriaan on erilaisia lähestymistapoja näkökulmasta riippuen. Lähestymistapoja hyödynnetään geometrian opetuksessa kouluasteen mukaan. Silfverberg (2018, s. 89) esittelee artikkelissaan kolme erilaista lähestymistapaa, jotka ovat konkreettien objektien geometria, havainnoin perusteltu ideaalisten tasokuvioiden ja kappaleiden geometria sekä kvasiaksiomaattinen geometria. Keskityn kahteen ensimmäiseen lähestymistapaan, koska ne sopivat parhaiten alakoulugeometriaan, johon tutkielmani perustuu. Kolmas eli kvasiaksiomaattinen geometria lähtee liikkeelle peruskäsitteiden ja suhteiden oletuksista, mikä edellyttää oppilaalta vahvaa geometrian perustaa sekä runsaasti aiempaa tietämystä. Lähestymistavan oppilaalle asettamien ennakkovaatimusten vuoksi jätän sen tutkielmani ulkopuolelle. (Silfverberg, 2018, s. 89.)

Ensimmäinen eli konkreettien objektien geometrian lähestymistapa pohjautuu ajatukseen, että luonto on geometrisesti järjestynyt, minkä johdosta geometriset suhteet sekä käsitteet löydetään todellisuudesta. Lähestymistavan ytimeistä löytyy oppilaiden omien havaintojen ja mittausten avulla perustellut geometriset to- tuudet. Geometrian opetuksen tavoitteet keskittyvät geometrinen muotojen hah-

mottamiseen sekä niiden muistamiseen ja nimeämiseen. Näiden ohella keskeisiin tavoitteisiin lukeutuu erilaisten suuruussuhteiden arviointi, mittaaminen sekä laskeminen. (Silfverberg, 2018, s. 89.)

Toinen eli havainnoin perusteltu ideaalisten tasokuvioiden ja kappaleiden geometrian lähestymistapa lähtee liikkeelle geometrinen käsitteiden määrittelystä, mutta rinnalla on edelleen vahvasti myös oppilaiden havainnot. Tässä lähestymistavassa teoreettiset asiat perustellaan oppilaille konkretian kautta. Konkretissa hyödynnetään oppilaiden omia havaintoja, kokeiluja sekä mittauksia, joiden avulla tarkasteltavat asiat saadaan ymmärrettävään muotoon. Edeltävään lähestymistapaan verrattuna, nyt geometrisia käsitteitä tarkastellaan matemaattisina objekteina osana matemaattista systeemiä. Mukaan tulevat myös riippuvuussuhteita kuvaavat kaavat sekä niiden soveltaminen. (Silfverberg, 2018, s. 89.)

Alakoulun geometrian, kuten myös koko matematiikan opetus, noudattaa ensimmäisen lähestymistavan oppilaslähtöisyyttä. Opetuksessa korostuu oppilaiden tekemät havainnot sekä konkretian tärkeys. Matematiikan opetus etenee kumulatiivisesti ja aiemmin opitut asiat kulkevat rinnalla koko ajan. (POPS, 2014, s. 128-130 ja 234-237; Ikäheimo & Risku, 2004, s. 222.) Ensimmäinen lähestymistapa voidaan nähdä sopivaksi alkuopetuksen geometriaan. Tästä koulugeometrian lähestymistapa etenee kohti jälkimmäistä oppilaiden kehittymisen ja tietotaidon lisääntymisen myötä.

3.2 Geometrian opetuksen rakenne

Matematiikan opetus ja tämän myötä myös geometrian opetus noudattaa systemaattista rakennetta, jossa uudet asiat kerrostuvat aiemmin opittujen päälle (POPS, 2014, s. 128-130). Edeltävässä luvussa huomattiin geometrian käsitteiden riippuvuus toisista käsitteistä. Tästä aksiomaattisesta käsitejärjestelmästä johtuen geometrian opetus etenee kumulatiivisesti (Risku, 2002, s. 118 ja 136; POPS, 2014, s. 128-130). Seuraavissa alaluvuissa käsitellään geometrialle tyypillistä systemaattista ajattelutapaa sekä geometria opetuksen perusajatuksia. Yhdessä nämä muodostavat rungon geometrian opetukselle.

Deduktiivinen ajattelu

Aiemmin todettiin, että alakoulun geometria on euklidista geometriaa. Aikoinaan geometrian pohjalta kehittyi deduktiivinen ajattelu, jota pidetään yhä matematiikan ja matematiikan opetuksen ytimenä. Erityisesti euklidinen geometria on yksinkertaisin tapa kehittää lasten deduktiivista ajattelua. Tämä johtuu euklidisen geometrian visuaalisesta luonteesta. Deduktiivisessa ajattelussa yhdestä tai useammasta tunnetusta tapauksesta johdetaan uusia tunnettuja tapauksia. Deduktiivisen ajattelun kehitys päättyy lapsilla jo yläkoulun loppuvaiheilla, minkä vuoksi deduktiivisen ajattelun harjoittelu ja sen myötä geometria on tärkeää alakoulun matematiikan opetuksessa. (Malaty, 1997, s. 118-119 ja 129.)

Geometrian opetuksen perusajatuks

Koulugeometria rakentuu seitsemän perusajatuksen ympärille (Wittmann, 1999, s. 205-223). Saksalainen ”Draw Me Emma”-tutkimushanke pohjautuu näihin Wittmannin perusajatuksiin, mistä johtuen ne ovat olennainen osa myös tätä tutkielmaa (Kuzle ym., 2018, s. 284-285; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 33-34). Wittmannin ajatuksia hyödynnetään monien maiden kansallisissa opetussuunnitelmissa ja ne ovat linjassa kansainvälisen matematiikan opetuksen komitean laatimien (ICMI eli The International Commission On Mathematical Instruction) geometrian opetussuunnitelmien suosituksien kanssa (Mammana & Villani, 1998, s. 1-8; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s.34). Wittmannin (1999) seitsemän perusajatusta ovat:

1. Geometriset muodot ja niiden rakentaminen
2. Muodoilla operointi
3. Koordinaatit ja koordinaatisto
4. Mittaus ja mittaaminen
5. Geometriset kuviot
6. Geometriset muodot ympäristössä
7. Geometrisyys

Alakoulussa geometriset muodot voivat olla nollaulotteisia pisteitä, yksiulotteisia viivoja tai kulmia, kaksiulotteisia tasokuvioita tai kolmiulotteisia kappaleita. Geometristen muotojen parissa työskentelyyn sisältyy niiden rakentelua esimerkiksi piirtämällä tai erilaisia rakenteluvälineitä hyödyntämällä. (Wittmann, 1999s. 205-223; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 33-34). Wittmannin ensimmäisen perusajatuksen geometristen muotojen luokittelua ulottuvuuksien mukaan on havainnollistettu edeltävässä teorialuvussa kuviossa 1.

Wittmannin (1999) toinen ajatus koskee muotojen parissa tapahtuvaa operointia ja kolmas koordinaatiston hyödyntämistä. Geometrian opetuksessa muodoilla operointia tulisi toteuttaa monin tavoin, jotta oppilas pääsee harjoittelemaan geometristen muotojen siirtoa, kiertoa, peilaamista, suurennoksien ja pienennöksiä sekä osiin jakamista ja yhdistämistä muihin muotoihin. Koordinaatistoa käytetään sijainnin ja sijaintisuhteiden harjoittelussa. Sijainnin harjoittelussa tutustutaan pisteen käsitteeseen sekä harjoitellaan pisteen käyttöä koordinaatistossa sijaintia ilmoittaessa. (Wittmann, 1999, s. 205-223; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 33-34).

Wittmannin neljännen ajatuksen mukaan mittaaminen on olennainen osa geometrian opetusta ja sitä tulisi harjoitella monin eri tavoin. Geometriassa mitataan pituuksia, pinta-aloja, tilavuuksia sekä kulmien suuruuksia. Mittaamisen yhteydessä on tärkeä harjoitella myös mittayksiköiden nimiä sekä oikeaoppista käyttöä. Kun ensimmäiseen perusajatuksen kuului geometristen muotojen rakentelu esimerkiksi piirtämällä niin viides perusajatus lisää vielä pisteiden, suorien ja tasojen hyödyntämisen geometristen muotojen rakenteluun. Kun oppilas osaa rakentaa geometrisia muotoja niin kuudennessa perusajatuksessa niiden avulla kuvataan ympäristöstä löytyvien esineiden, muotojen ja asioiden välisiä suhteita. (Wittmann, 1999, s. 205-223; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 33-34). Wittmannin ajatuksien mukaisia kuvauksia löytyy myös muista tutkimuksista sekä kirjallisuudesta. Esimerkkinä Silfverbergin (2018, s. 87) artikkeli, jonka mukaan koulugeometrian myötä oppilas oppii jäsentämään ympäristön suhteita geometristen muotojen avulla.

Viimeiseen eli seitsemänteen perusajatukseen sisältyy geometrisyys sekä geometrian käyttö. Tavoitteena on se, että oppilas osaa muuntaa erilaisia matemaattisia ongelmia geometrian kielelle sekä tarkastella ongelmia geometrisesti. (Wittmann, 1999, s. 205-223; Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 33-34).

3.3 Geometria opetussuunnitelmassa

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, s. 129, 236, 376) geometriaa on jokaisella vuosiluokalla alakoulusta yläkouluun saakka. Opetussuunnitelmassa geometria on matematiikan sisältöalue. Alakoulussa se kulkee nimellä geometria ja mittaaminen, kun taas yläkoulun puolella sisältöalueen nimi on pelkästään geometria (POPS, 2014, s. 129, 236 ja 376.) Opetussuunnitelmassa ei ole erikseen kolmannen luokan geometrian opetusta koskevaa osiota, vaan se sisältyy alakoulun luokkien 3.-6. matematiikan opetuksen kokonaisuuteen. Käsittelen ensin, millaista alakoulun matematiikan opetus on opetussuunnitelmassa sekä millainen pohja kolmasluokkalaisilla oppilailla on geometriassa 1.-2. luokkien matematiikan opetuksen pohjalta. (POPS, 2014, s. 128-130 ja 234-239.)

Geometrian opetus luokilla 1-2

Alkuopetuksessa, alakoulun ensimmäisellä ja toisella luokalla matematiikan opetuksen tehtävä on kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua sekä luoda pohjaa matematiikan opiskelulle ja matematiikan käsitteiden muodostumiselle. Matematiikan opetus etenee kumulatiivisesti ja siinä korostuu konkretia sekä toiminnallisuus. (POPS, 2014, s. 128-130; Ikäheimo & Risku, 2004, s. 222.) Opetuksen lähtökohtana on positiivisen asenteen sekä minäkuvan rakentaminen. Näiden lisäksi oppilas pääsee harjoittelemaan monipuolisesti eri taitoja kuten viestintää, vuorovaikutusta, vastuunkantoa sekä muiden kanssa toimimista. (POPS, 2014, s. 128.)

Opetuksessa hyödynnetään erilaisia opetusmenetelmiä ja työtapoja sekä ohjataan oppilasta matematiikan monipuoliseen käyttöön (POPS, 2014, s. 128 ja 130). Ikäheimon ja Riskun (2004, s. 227) mukaan alkuopetuksen matematiikkaan soveltuvia työtapoja ovat tutkiva ja toiminnallinen työskentely, opettajajohtoinen

opetus, yksilötehtävät, pari- ja ryhmätyöskentely sekä erilaisten opetuspelien ja tietotekniikan tarjoamien mahdollisuuksien hyödyntäminen.

Geometria ja mittaaminen kuuluu matematiikan opetuksen sisältöalueisiin ja sen osalta tärkeitä aiheita ovat kolmiulotteinen ympäristö, tasogeometria sekä mittauksen periaate. Taitoina harjoitellaan hahmottamista, rakentelua, piirtämistä, mittaamista, nimeämistä, tunnistamista, luokittelua sekä oikeaoppisten käsitteiden käyttöä. Keskeisiä käsitteitä ovat kappaleet, tasokuviot, suuntaa ja sijaintia määrittävät käsitteet sekä kellonajat ja niiden ilmoittamiseen tarvittavat ajanyksiköt. Näiden lisäksi oppilas tutustuu erilaisiin suureisiin kuten tilavuuteen, massaan ja painoon. Suureiden yhteydessä harjoitellaan myös tarvittavien mittayksiköiden käyttöä. Geometrian osalta edistymistä kappaleiden ja kuvioden luokittelussa pidetään arvioinnissa sekä palautteen annossa keskeisenä. (POPS, 2014, s. 128-130.)

Ikäheimo ja Risku (2004, s. 227-228) korostavat, että alkuopetuksen matematiikan opetuksen tulisi tukea oppilaiden yksilöllistä etenemistä. Tämän lisäksi opetuksen keskiössä tulisi säilyttää toiminnallisuus sekä leikillisuus. Näiden toteutumiseen opettaja voi vaikuttaa muun muassa oppimis- ja opetusmenetelmien valinnoilla. On myös todettu, että havainnollistavien opetusvälineiden sekä ulkoisen materiaalin käyttö ja ääneen ajatteleva ajattelu tehostavat oppilaan oppimista. Se, kuinka paljon oppilaan oppiminen tehostuu ja matemaattinen ajattelu kehittyy, on yksilöllistä. Erilaisten opetusvälineiden, oppikirjan sekä muun materiaalin avulla alkuopetuksen matematiikan opetusta saa myös eriytettyä ja vietyä yksilöllisempään suuntaan. Geometrian opetuksessa on tärkeä hyödyntää välineitä, jotka havainnollistavat geometrian käsitteitä. Uusien käsitteiden opetuksessa lähtökohdana kannattaa olla konkretiaa tukevat välineet, joiden kautta siirrytään kohti abstraktimpaa tasoa. (Ikäheimo & Risku, 2004, s. 227-228 ja 232.)

Geometrian opetus luokilla 3-6

Alakoulun 3.-6.- luokalla matematiikan opetuksen tehtävä on samanlainen kuin alkuopetuksessa, mutta oppilaiden matemaattinen osaaminen syventyy entisestään. Geometriassa käsitteitä tulee lisää ja sisältöihin perehdytään tarkemmin. Tuttujen geometrialle ominaisten taitojen harjoittelu jatkuu. Näistä esimerkkeinä

mittaaminen, luokittelu, rakentelu, piirtäminen, nimeäminen ja tunnistaminen. Alkuopetuksen tavoin, myös 3.-6.-luokkien geometrian opetus noudattaa matematiikan opetuksen systemaattista rakennetta, jossa uudet asiat kerrostuvat jo opittujen päälle. Osa geometrian käsitteistä esiintyy sekä 1.-2. että 3.-6. luokkien opetussuunnitelmissa, mutta osa vain jommassakummassa. Joka tapauksessa kaikki 3.-6. luokilla opeteltavat käsitteet ja harjoiteltavat taidot ovat jatkumoa alkuopetuksen geometrialle. (POPS, 2014, s. 236.)

Geometrian opetuksen tavoitteet

Opetussuunnitelmasta (2014, s. 102 ja 158) löytyy oppiainekohtaiset tavoitetaulukot, joihin on merkitty kunkin oppiaineen tavoitteet sekä tavoitteisiin liittyvät sisällöt ja laaja-alaisen oppimisen taidot. Tavoitetaulukot ovat laadittu erikseen alkuopetukselle sekä kolmannelta luokasta ylöspäin kuudenteen luokkaan asti. Tavoitetaulukkoissa matematiikan opetuksen tavoitteet ovat luokiteltu kolmeen ryhmään, jotka ovat: (POPS, 2014, s. 128-129 ja 235.)

1. Merkitys, arvot ja asenteet
2. Työskentelyn taidot
3. Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet

Ensimmäisen sekä toisen ryhmän tavoitteet kuuluvat geometriaan, kuten myös kaikkiin muihin matematiikan sisältöalueisiin. Toisin sanoen ne ohjaavat koko matematiikan opetusta. Näiden lisäksi geometriaan liittyy kolmannen ryhmän tavoitteet, jotka sisältävät myös nimenomaan geometriaan kohdennettuja tavoitteita. Tutkielmani kannalta nämä ovat tärkeimmät, koska geometrian opetus rakentuu niiden varaan. Taulukkoon 1 on tiivistetty geometriaan liittyvät tavoitteet luokilla 1.-2. sekä 3.-6. Opetussuunnitelma on suunnattu opettajille, joten sen kirjoitusmuoto on myös tähän tarkoitukseen tehty. Tavoitteiden kohdalla on käytetty sanoja ”ohjata”, ”tukea”, ”opastaa”, ”innostaa”, ”kannustaa” ja ”pitää yllä”. Tutkielmaani varten olen poiminut taulukkoon 1 opetussuunnitelman tavoitteista keskeisen sisällön ja jättänyt opettajille suunnatun puheen pois. Näin tavoitteet sopivat tutkielmaani varten ja auttavat ymmärtämään oppilaiden käsityksiä geometrian opetusta kohtaan. (POPS, 2014, s. 128-129 ja 235.)

Taulukko 1. Geometrian opetuksen tavoitteet opetussuunnitelmassa

Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet	
1.-2.-luokat	3.-6.-luokat
<ul style="list-style-type: none"> • matemaattiset käsitteet ja merkinnät • geometriset muodot • geometristen muotojen ominaisuuksien havainnointi • mittaamisen periaatteen ymmärtäminen 	<ul style="list-style-type: none"> • matemaattiset käsitteet ja merkinnät • kappaleiden ja kuvioiden geometristen ominaisuuksien havainnointi sekä kuvailu • geometriset käsitteet • mittaushavainnointien suuruuden arvioiminen • mittausvälineet • mittayksiköt • mittaustulosten järjestyksen pohtiminen

Taulukon 1 geometrian opetuksen tavoitteista huomataan, että alkuopetuksessa geometrian opetuksen pääpaino on geometrisissa muodoissa sekä mittaamisessa. Kolmannesta luokasta alkaen opetuksen tavoitteiden määrä kasvaa, mutta opetuksen keskiössä pysyvät edelleen geometriset muodot sekä mittaaminen. Alkuopetuksessa keskitytään mittaamisen periaatteen ymmärtämiseen, mutta myöhemmin mittaamisen parissa harjoitellaan monipuolisesti eri taitoja kuten mittaushavainnointien suuruuden ja lopullisen tuloksen arvioimista sekä eri mittausvälineiden ja mittayksiköiden käyttöä. (POPS, 2014, s. 128-129 ja 235.)

3.4 Oppilaiden käsitykset geometriasta ja geometrian opetuksesta

Käsittelen ensin geometrian oppimista ja taustoitan sen avulla oppilaiden käsityksien rakentumista geometriasta ja geometria opetusta kohtaan. Geometrian oppimisen käsittelyssä hyödynnän hollantilaisen Pierre van Hielin ja Dina van Hiele-Gedolfin vuonna 1957 kehittämää teoriaa geometrisen ajattelun kehittymisestä. (Van Hiele, 1999, s. 310-316; Silfverberg, 1986, s. 4; Silfverberg, 1999, s. 27; Douglas & Clements, 1992, s. 426-431; Korkatti, 2016, s. 51-61.)

3.4.1 Van Hielen teoria

Van Hielen teoriassa on viisi tasoa, jotka kuvaavat laadullisia muutoksia geometrisen ajattelun kehityksessä. Muutokset ovat oppilaasta riippumatta samankaltaisia sekä samassa järjestyksessä tapahtuvia. Vain muutoksien tapahtumisnopeudessa on eroavaisuuksia oppilaiden välillä. (Silfverberg, 1999, s. 27; Korkatti, 2016, s. 52.) Teoria kuvaa geometrian oppimisen vaiheita sekä niissä etenemistä. Oppiminen lähtee liikkeelle ensimmäiseltä tasolta ja oppilas etenee tasoilla kehittymisensä mukaan. (Silfverberg, 1986, s. 4.) Seuraavalle eli edistyneemmälle tasolle siirtyminen edellyttää aina aikaisempien tasojen tietojen ja taitojen hallintaa. (Douglas & Clements, 1992, s. 426-427.) Silfverbergin (1999, s. 60) mukaan oppilaat ovat tasoilla 1-3 peruskoulun matematiikassa.

Ensimmäisellä eli visualisoinnin tasolla (*Visualisation*) oppilas käsittelee kuvioita niiden ulkomuodon perusteella. Tällä tasolla kuvioiden ominaisuudet ovat vielä vieraita, mutta oppilas kykenee tunnistamaan, nimeämään ja piirtämään yleisimmät geometriset kuviot. Oppilas osaa myös kuvailla, luokitella ja vertailla erilaisia kuvioita niiden ulkomuodon perusteella. Oppilaan ajattelu on tällöin konkreettisella tasolla, jolloin oppilas kykenee muistamaan joitakin geometrisia käsitteitä, mutta kokee ne lähinnä vain erilaisten kuvioiden nimiksi. (Van Hiele, 1999, s. 311; Silfverberg, 1986, s. 5; Silfverberg, 1999, s. 27; Douglas & Clements, 1992, s. 427; Korkatti, 2016, s. 53.)

Toisella eli ominaisuuksien analysoinnin (*Analysis*) tasolla oppilaan ajattelu on muuttunut hieman abstraktimmaksi ja oppilas pystyy hyödyntämään kuvioiden ominaisuuksia toimiessaan kuvioiden parissa. Ominaisuuksien väliset riippuvuussuhteet ovat vielä liian vaikeita, minkä vuoksi oppilas käsittelee kuvioiden ominaisuuksia toisistaan irrallisina asioina. (Van Hiele, 1999, s. 311; Silfverberg, 1986, s. 5-6; Silfverberg, 1999, s. 27-28; Douglas & Clements, 1992, s. 427; Korkatti, 2016, s. 54.)

Kolmannella eli ominaisuuksien järjestämisen (*Informal deduction*) tasolla oppilas ymmärtää ominaisuuksien lisäksi myös niiden välisiä suhteita. Tällä tasolla ollessaan oppilas pystyy hyödyntämään ominaisuuksien suhteita operoidessaan kuvioilla. Tämän lisäksi oppilas pystyy seuraamaan yksinkertaista deduktiivista

päättelyn ketjua sekä käyttämään geometrisia ominaisuuksia ja yleisimpiä geometrisia määritelmiä. (Van Hiele, 1999, s. 311; Silfverberg, 1986, s. 6; Silfverberg, 1999, s. 28; Douglas & Clements, 1992, s. 427; Korkatti, 2016, s. 55.)

Käsittelen kaksi viimeistä tasoa lyhyesti samassa kappaleessa, koska Silfverbergin (1999, s. 60) mukaan oppilas ei yleensä etene näille tasoille peruskoulun aikana. Neljännellä eli formaalin päättelyn (*Deduction*) tasolla oppilas hallitsee deduktiivisen geometrian edellyttämän ajattelutavan. Tällä tasolla oppilas ymmärtää, mitä tietoja hänelle on annettu ja mitä niistä pystyy päättämään. Oppilas hahmottaa asioiden välisiä yhteyksiä, sekä tunnistaa mitä tietoja tehtävässä eteneminen tai ratkaisuun pääseminen vaatii. Formaalin päättelyn tasolla oppilas hallitsee monia käsitteitä sekä käsitteiden välisiä eroja. Käsitteistä esimerkkeinä määritelmä, aksiomi, lause, käänteislause sekä ehto. (Silfverberg, 1986, s. 6; Silfverberg, 1999, s. 28; Douglas & Clements, 1992, s. 427-428; Korkatti, 2016, s. 55-56.) Viimeisellä eli aksiomisysteemin ymmärtämisen (*Rigor*) tasolla oppilas pystyy hyödyntämään matemaattisia malleja sekä kuvailemaan matemaattisia ilmiöitä mallien avulla. (Silfverberg, 1986, s. 6; Silfverberg, 1999, s. 28; Douglas & Clements, 1992, s. 428; Korkatti, 2016, s. 56.)

3.4.2 Oppilaiden käsitykset geometriasta

Tutkielmani pohjautuu saksalaiseen tutkimushankkeeseen, jossa kolmas-, neljäs-, viides- ja kuudesluokkalaisten oppilaiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta tutkittiin ja tutkitaan edelleen piirrostutkimuksen avulla. Tutkimuksen ensimmäiseen vaiheeseen osallistui yhteensä 114 oppilasta ympäri Saksan Brandenburgin kouluja. Ensimmäisessä vaiheessa tutkittiin oppilaiden käsityksiä geometriasta ja parhaillaan käynnissä olevassa toisessa vaiheessa tutkitaan oppilaiden käsityksiä geometrian opetuksesta. Esittelen seuraavaksi ensimmäisen vaiheen tuloksia. (Kuzle ym. 2018.)

Tutkimuksesta julkaistun artikkelin tuloksista on havaittavissa, että tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden käsitys geometriasta keskittyi geometrisiin muotoihin kaikilla luokka-asteilla (Kuzle ym. 2018, s. 287). Artikkelissa kerrotaan, että oppilaiden käsitys geometriasta oli kapea eikä käsityksestä käynyt ilmi geometrinen

muotojen ominaisuuksien sisäistäminen. Oppilaat hallitsivat geometrian perusasiat, mutta piirustuksista tai niiden pohjalta toteutetuista haastatteluista ei välitynyt geometrian syvällisempää ymmärrystä. Suurin osa oppilaista piirsi piirustukseensa yhden tai korkeintaan kaksi geometrian perusasiaa. Vain harvojen oppilaiden piirustuksissa oli useampia geometrisia objekteja. (Kuzle ym., 2018, s. 283 ja 288.) Kaiken kaikkiaan tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat pääosin van Hielen teorian ensimmäisellä eli visualisoinnin tasolla (Kuzle ym., 2018, s. 289). Alla olevaan taulukkoon 2 on koottu tutkimuksen (Kuzle ym., 2018, s. 287) tarkemmat tulokset kaikilta tutkimuksessa mukana olleilta luokka-asteilta. Taulukon luvut ovat prosentteja, mutta prosenttimerkintä on jätetty pois lukemisen helpottamiseksi.

Taulukko 2. Saksalaisen piirrostutkimuksen tulokset 3.-6.-luokkalaisten oppilaiden käsityksistä geometriaa kohtaan (Kuzle ym., 2018, s. 287).

	3.lk	4.lk	5.lk	6.lk
Geometriset muodot ja niiden rakentelu	73.3	77.8	67.7	74.2
Operointi muodoilla	8.7	4.5	8.2	3.7
Koordinaatit ja sijaintisuhteet	8	1.0	1.0	0.8
Mittaaminen	1.3	4.5	5.1	11.9
Geometriset kuviot	1.3	0.7	1.0	0.4
Geometriset muodot ympäristössä	7.3	10.8	16.4	6.2
Geometrisyys	0	0.7	0.5	2.9

Taulukosta 2 huomataan, että kaikilla tutkimuksessa mukana olleilla luokka-asteilla oppilaiden käsitys geometriasta painottui geometrisiin muotoihin sekä niiden ominaisuuksiin. Piirustuksien sisällöistä noin 70% koodattiin kuuluvaksi geometrisiin muotoihin sekä niiden ominaisuuksiin. Tähän aihealueeseen kuuluivat esimerkiksi nolla-, yksi-, kaksi- ja kolmeulotteiset kuviot, piirtäminen ja piirustusvälineet, geometristen muotojen ominaisuudet sekä erilaiset kulmat. Tutkimuksesta julkaistussa artikkelissa kerrotaan, että geometrisista muodoista oppilaiden piirustuksissa esiintyi eniten tasokuvioita ja toiseksi eniten kappaleita. Kolmanneksi eniten piirustuksissa oli erilaisia piirustusvälineitä kuten sapluunoita ja viivoittimia.

Geometrinen muotojen ominaisuuksia ilmeni vain neljäs-, viides- ja kuudesluokkalaisten oppilaiden piirustuksissa. (Kuzle ym., 2018, s. 287.)

Taulukosta 2 huomataan, että kolmasluokkalaisten piirustuksissa esiintyi toiseksi eniten muodoilla operointia, neljäs- ja viidesluokkalaisten piirustuksissa ympäristön geometrisia muotoja ja kuudesluokkalaisten piirustuksissa mittaamiseen viittaavia asioita. Tutkielmani kannalta kiinnostavimmat tulokset ovat kolmasluokkalaisten oppilaiden käsitykset geometriasta. Muodoilla operoinnin ohella kolmasluokkalaiset piirsivät melkein yhtä paljon koordinaatteja ja sijaintisuhteita sekä geometrisia muotoja ympäristössä piirustuksiinsa. Taulukosta huomataan myös, että kolmasluokkalaisten piirustuksista löytyi huomattavasti enemmän koordinaatteihin ja sijaintisuhteisiin liittyviä asioita, kuin ylempien vuosiluokkien oppilaiden piirustuksista. Kuzlen, Gracin ja Klunlerin (2018, s. 288) artikkelissa sanotaan, että kolmasluokkalaiset käyttivät sanoja vasemmalla ja oikealla kuvaamaan geometrinen muotojen sijainteja, kun ylempien vuosiluokkien oppilaat hyödynsivät koordinaatistoa. (Kuzle ym., 2018, s. 287-288.)

Muiden aihealueiden sisältöjä kolmasluokkalaisten oppilaiden piirustuksista ei esiintynyt juuri ollenkaan. Taulukosta huomataan kuitenkin, että mittaamiseen sisältyvät asiat lisääntyivät oppilaiden piirustuksissa luokkien myötä. Kolmannen luokan piirustuksissa mittaamista ei ilmennyt juuri ollenkaan, mutta kuudennella luokalla mittaamisen osuus oli jo melkein 12% piirustuksien sisällöistä. Myös muihin geometrisiin asioihin lukeutuvat sisällöt lisääntyivät luokkien myötä, mutta niiden kasvu ei ollut niin merkittävä. Kyseiseen aihealueeseen kuuluivat esimerkiksi geometriset laskelmat sekä ongelmat. (Kuzle ym., 2018, s. 287-288.)

Esittelen seuraavaksi vielä Dubravka Glasnović Gracin and Ana Kuzlen tapaus-tutkimuksen, jossa tutkittiin neljän kroatialaisen oppilaan käsityksiä geometriasta sekä geometrian opetuksesta. Tutkimus toteutettiin pari vuotta ennen Saksassa toteutettua laajempaa tutkimusta ja se toimi pilottitutkimuksena. Tutkimukseen osallistuivat kakkosluokkalainen poika, kolmasluokkalainen tyttö, neljäsluokkalainen poika sekä viidesluokkalainen tyttö. Esittelen tutkimuksen tulokset erikseen

aloittaen oppilaiden käsityksistä geometriaa kohtaan, minkä jälkeen esittelen oppilaiden käsityksiä geometrian opetuksesta seuraavassa alaluvussa. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018.)

Poika 2.luokka

Oppilaan käsitykseen geometriasta sisältyi pisteet, viivat, tasokuviot (ympyrä, kolmio ja nelikulmio) sekä kappaleet (lieriö, särmiö, kartio, pyramidi ja pallo). Geometristen muotojen lisäksi oppilas tiesi, että kaksiulotteisista kuvioista voidaan rakentaa kolmiulotteisia kappaleita. Haastattelussa oppilas oli kertonut, että myös pituuden mittaaminen on geometriaa ja siinä tarvitaan mittayksiköitä sekä mitausvälineitä. Lisäksi oppilas oli kertonut pelistä, joka sisältää geometriaa ja, jossa hän oli ratkaissut ongelman geometriaa hyödyntäen. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 42-43.)

Tyttö 3.luokka

Oppilaan käsitykseen geometriasta sisältyi pisteet, viivat, tasokuviot (ympyrä, kolmio ja neliö) sekä yhdenlainen kappale, joka oli pyramidi. Geometristen muotojen lisäksi hän oli piirtänyt kaksiulotteisten kuvioiden yhdistelmiä. Oppilaan piirustus oli kokonaisuudessaan symmetrinen suoran suhteen. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 43-45.)

Poika 4.luokka

Oppilaan käsitykseen geometriasta sisältyi viivat, tasokuviot (ympyrä, kolmio ja nelikulmio) sekä kappaleita (lieriö, särmiö, kartio, pyramidi ja pallo). Geometristen muotojen lisäksi oppilas piirsi piirustusvälineitä sekä ominaisuuksiin liittyviä asioita kuten viivojen yhdensuuntaisuutta. Oppilas oli myös havainnollistanut ympyrän säteen mittaamisen sekä kirjoittanut mittaamiseen liittyviä sanoja piirustuksen yhteyteen (kehä, pinta-ala ja tilavuus). Haastattelussa oppilas oli kertonut, että tietää myös yksikkömuunnoksien olevan geometriaa. Poikkeuksena edeltäviin piirustuksiin niin neljäsluokkalaisten oppilaan piirustuksessa ilmeni myös ympäristön geometrisia muotoja. Oppilas oli piirtänyt maapallon, joka edusti piirustuksessa palloa. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 45-46.)

Tyttö 5.luokka

Oppilaan käsitykseen geometriasta sisältyi tasokuvioita (ympyrä, kolmio ja neliö) sekä yhdenlainen kappale (särmio). Lisäksi oppilas tiesi, että ympyrä koostuu kahdesta osasta, mutta ei muistanut näiden nimiä. Mittaamista oppilas oli tuonut esille merkitsemällä kuvaan kolmion sivun erillisellä viivalla sekä kysymysmerkillä. Haastattelussa oppilas lisäsi, että pinta-alat kuuluvat myös mittaamiseen. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 47.)

Kaiken kaikkiaan tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden käsitys geometriasta painottui geometrisiin muotoihin. Piirustuksissa yleisimmät muodot olivat viivoja, tasokuvioita ja kappaleita. Tasokuvioiden osalta oppilaille tutuimmat kuviot olivat ympyrät, kolmiot sekä erilaiset nelikulmiot. Haastatteluissa oppilaat puhuivat eniten mittaamiseen liittyvistä asioista. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 48-49.)

3.4.3 Oppilaiden käsitykset geometrian opetuksesta

Poika 2.luokka

Oppilaan geometrian tuntia kuvaavasta piirustuksesta välittyi positiivinen ilmapiiri ja opettaja sekä oppilaat olivat vuorovaikutuksessa keskenään. Piirustuksessa opettaja oli sijoitettu luokan eteen taulun lähetyville. Taululla näkyi geometrisia muotoja, joiden pohjalta opettaja esitti matemaattisia kysymyksiä. Oppilaat pyysivät piirustuksessa viittaamalla puheenvuoroa ja vastauksen jälkeen opettaja antoi heille positiivista palautetta. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 42-43.)

Tyttö 3.luokka

Oppilaan geometrian tuntia kuvaavassa piirustuksessa oli positiivinen ilmapiiri, joka välittyi puhekuplista sekä haastattelusta. Piirustuksessa opettaja oli sijoitettu taululle ja opettaja opetti, kuinka geometrisia muotoja piirretään. Piirustuksessa opettaja sekä oppilaat olivat vuorovaikutuksessa keskenään. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 44-45.)

Poika 4.luokka

Oppilaan geometrian tuntia kuvaavassa piirustuksessa on sekä positiivisia että negatiivisia ilmeitä tai ajatuskuplia näkyvissä. Piirustuksessa oppilaat työskentelivät itsenäisesti opettajan antamien tehtävien parissa, kun opettaja tarkkailee sivusta. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 46.)

Tyttö 5.luokka

Oppilaan geometrian tuntia kuvaavasta piirustuksesta ei välittynyt oppitunnin ilmapiiri. Piirustuksessa oppilaat työskentelevät itsenäisesti opettajan antamien tehtävien parissa. Tehtävien tekemisen välissä oppilaat kävivät ratkaisemassa tehtäviä myös taululla. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 47-48.)

Kaiken kaikkiaan piirustuksista välittyvä ilmapiiri oli positiivinen, neutraali tai tunnistamaton, mutta ei negatiivinen kertaakaan. Yhteistä piirustuksissa oli se, että opettaja oli luokan edessä ja oppilaat työskentelivät itsenäisesti eikä oppilaiden välistä vuorovaikutusta esiintynyt. Sen sijaan opettajan ja oppilaan välistä vuorovaikutusta näkyi, mikä saattoi ilmetä esimerkiksi positiivisina kommentteina oikean vastauksen jälkeen. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 49-50.)

4 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkielman tavoitteena on selvittää, minkälaisia käsityksiä kolmasluokkalaisilla oppilailla on geometriasta sekä geometrian opetuksesta. Aihetta tutkitaan piirrostudkimuksen avulla.

Tutkimuskysymykseni ovat:

1. Minkälaisia käsityksiä kolmasluokkalaisten oppilaiden piirustuksissa esiintyy geometriasta?
2. Minkälaisia käsityksiä kolmosluokkalaisten oppilaiden piirustuksissa esiintyy geometrian opetuksesta?

Etsin tutkimuskysymyksiin vastauksia tutkimalla kolmasluokkalaisten oppilaiden geometriasta ja geometrian opetuksesta tekemiä piirustuksia. Tutkin aihetta luokkakohtaisesti sekä vertailemalla luokkia keskenään. Geometriaa kuvaavien piirustuksien tukena hyödynnän oppilaiden kirjallisia vastauksia piirustuksen ohessa oleviin kysymyksiin. Vertailen oppilaiden piirustuksissa ilmeneviä käsityksiä myös heidän luokanopettajiensa tekemiin piirustuksiin. Tutkielman pääpaino on oppilaiden piirustuksissa.

5 Tutkimuksen toteutus

Tutkielmani on kuvaileva määrällinen tapaustutkimus, jossa hyödynnän visuaaliin tutkimusmenetelmiin kuuluvaa piirrosanalyysia. Tässä luvussa esittelen tutkielmani lähtökohdat, keräämäni aineiston, käytetyn tutkimusmenetelmän sekä aineiston analyysimenetelmän. Havainnollistan aineiston analyysiä kirjoittamalla kaksi piirustuksen analysointia auki.

5.1 Tutkimusasetelma

Tutkielmani on määrällinen tutkimus, koska aineiston analyysissa ollaan kiinnostuneita tutkittavien asioiden esiintyvyydestä ja tulokset esitetään numeerisesti. Tutkielman tapauksina toimivat tutkielmassa mukana olevat luokat ja tutkielman tavoitteena on kuvailla tarkasti näiden luokkien oppilaiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta. Tämän johdosta tutkielmani on kuvaileva määrällinen tapaustutkimus. (Vilkka, 2007, s. 13-17.)

Tutkielmassa on kuitenkin myös laadullisen tutkimuksen piirteitä. Tutkielman aineisto on laadullinen, mutta se esitetään numeerisesti. Erityisesti laadullisen tutkimuksen pyrkimys ymmärtämään tutkittavaa ilmiötä kokonaisvaltaisesti sopii tutkielman aiheeseen. Tutkielman keskiössä on aineiston yksityiskohtainen tarkastelu, mikä on tyypillistä laadulliselle tutkimukselle. (Metsämuuronen, 2009, s. 220; Hirsjärvi, Remes & Sajavaara, 2009, s. 161, 164; Eskola & Suoranta, 1998, s. 14; Vilkka, 2007, s. 14) Tutkielmassa tarkoitukseni on analysoida piirustukset yksityiskohtaisesti sekä noudattaa tarkasti samaa linjaa jokaisen piirustuksen kohdalla. Aineiston hankinnassa ja analyysissa korostuu tutkittavien näkökulmien esille tuominen sekä tiedon subjektiivinen luonne (Hirsjärvi ym., 2009, s. 164; Eskola & Suoranta, 1998, s.14).

Tutkielma rakentuu piirustuksien varaan eli kyseessä on piirrostutkimus, jossa aineistona toimii kolmasluokkalaisten oppilaiden ja heidän luokanopettajien tekemät piirustukset. Piirustuksia on kahdesta eri aiheesta, joista ensimmäisen yhteydessä oppilaat ovat vastanneet myös kahteen kysymykseen piirustukseen liittyen. Tutkielman pääpaino on oppilaiden piirustuksissa, joita on monin verroin

suhteessa opettajien piirustuksiin. Opettajien piirustuksia hyödynnetään oppilaiden piirustuksien rinnalla vertaillen oppilaiden käsityksiä sekä opettajien käsitystä hänen oppilaistaan keskenään. Tutkielman päätavoite on kuitenkin selvittää, minkälaisia käsityksiä oppilailla on. Opettajien piirustukset tarjoavat lähinnä mielenkiintoista lisämateriaalia vertailun tueksi ja rinnalle. Aineiston analysoinnissa käytetään piirrosanalyysia, josta löytyy tarkempaa kuvausta myöhemmistä alaluvuista. Piirustuksia analysoidaan piirrosanalyysillä ja ensimmäisen piirustuksen yhteydessä olevien kysymyksien vastauksien käytetään analysoinnin tukena tuloksien esittelyssä.

5.2 Aineiston esittely ja hankinta

Tutkielmani aineisto koostuu yhteensä 98 piirustuksesta. Näistä piirustuksista 94 on oppilaiden tekemiä ja 4 opettajien tekemiä. Piirustusten tekemiseen on osallistunut 47 kolmasluokkalaista oppilasta sekä kaksi luokanopettajaa. Oppilaat ovat kahdelta eri kolmannelta luokalta samasta pääkaupunkiseudun koulusta. Lisäksi mukana on näiden luokkien omat luokanopettajat. Jokainen oppilas ja kumpikin opettaja teki kaksi erilaista piirustusta. Aineisto on kerätty tamikuussa 2019 viikolla 2.

Aineiston kerääminen edellytti kaksi käyntiä kummassakin luokassa. Käynnit kestivät 45 minuuttia, josta piirustuksen tekemiseen oli varattu aikaa noin 30 minuuttia. Paikalle asettuminen ja ohjeistuksen kertominen vei käynnistä aina ensimmäiset 15 minuuttia. Piirustusten tekeminen oli jaettu kahdelle eri päivällä, ettei oppilaiden jaksaminen ja keskittyminen lopu kesken. Ensimmäisellä piirustuskerralla oppilaat tekivät piirustuksen aiheesta ”mitä on geometria” ja toisella kerralla aiheesta ”millainen on geometrian tunti”. Ensimmäisen piirustuksen yhteydessä oppilaat vastasivat myös kahteen kysymykseen, jotka liittyivät piirustukseen. Kysymykset olivat: 1. Miten geometria näkyy piirustuksessasi? 2. Haluatko sanoa vielä jotain muuta geometriasta, mitä piirustuksessasi ei näy?

Piirtämistä varten jokainen oppilas sai piirustuspohjan, jonka yläreunassa luki tehtävänanto piirtämistä varten. Tämän lisäksi ohjeistus käytiin suullisesti läpi

molempien piirustuskertojen alussa. Piirustus pohjista löytyi valmis otsikko piirustukselle. Ensimmäisessä piirustuksessa otsikko oli “minun käsitykseni geometriasta” ja toisessa “minun luokkani geometrian tunnilla” Piirustus pohjat ovat näkyvillä liitteissä 1 ja 2. Alla olevaan taulukkoon 4 on koottu piirustuksien tekoon osallistuneiden oppilaiden lukumäärät. Lisäksi taulukkoon on eritelty luokkien sukupuolijakaumat.

Taulukko 4. Tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden lukumäärät

Oppilaat			Piirustus 1			Piirustus 2		
Yht.	Tytöt	Pojat	Yht.	Tytöt	Pojat	Yht.	Tytöt	Pojat
A: 23	13	10	23	13	10	23	13	10
B: 24	12	12	24	12	12	24	12	12

Käytän luokista tunnuksia A ja B. Luokkien erittely on tärkeää, koska tutkimustuloksissa luokkia vertaillaan keskenään. Taulusta 4 nähdään, että A-luokalla oli 23 oppilasta, joista 13 oli tyttöjä ja 10 poikia. Jokainen oppilas osallistui ensimmäisen kuvan eli “mitä on geometria” sekä toisen kuvan eli “millainen on geometrian tunti” tekemiseen. B-luokalla oppilaita oli yhteensä 24, joista 12 oli tyttöjä ja 12 poikia. Myös B-luokalla jokainen oppilas osallistui molempien kuvien tekemiseen. Myös luokkien opettajat olivat paikalla molemmilla piirustustunneilla, joten opettajien piirustuksia ei jäänyt uupumaan.

Tutkielmassa mukana olleiden luokkien luokanopettajat tekivät piirustukset samaan aikaan omien oppilaidensa kanssa. Opettajien ohjeistuksena oli piirtää kuva, jonka he kuvittelevat oman luokkansa keskiverto-oppilaan piirtävän. Ensimmäisellä piirustustunnilla opettajat piirsivät kuvan keskiverto-oppilaan käsityksestä geometriaa kohtaan ja toisella piirustustunnilla geometrian opetusta kohtaan. Opettajien piirustuksissa esiintyy siis opettajan käsitys siitä, millaisen piirustuksen hänen luokkansa keskiverto-oppilas voisi piirtää saamansa ohjeistuksen perusteella.

5.3 Piirrosanalyysi menetelmänä

Thomsonin (2008, s. 8) mukaan piirrosanalyysi kuuluu visuaalisiin tutkimusmenetelmiin. Visuaaliset aineistot voidaan jakaa kolmeen aineistotyyppiin niiden keräämistavan perusteella. Aineisto voi olla valmis aineisto kuten lehtikuvat, tutkijan itse koostama kuten valokuvat tai tutkimukseen osallistuvien tuottama kuten omassa tutkielmassani, kun aineistona toimii oppilaiden tekemät piirustukset. (Heath, Brooks, Cleaver, Ireland, 2009, s. 117.) Valokuvien ja piirustuksien lisäksi visuaalisia tutkimusmenetelmiä voidaan käyttää myös taide- sekä videoaineistojen parissa (Pink, 2004, s. 4). Piirrosanalyysi sopii sekä laadulliseen että määrälliseen tutkimukseen. Laadullisessa tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita siitä, mitä piirustus sisältää, kun määrällisessä tutkitaan sitä, kuinka usein jokin asia ilmenee piirustuksissa. Tämän tutkielman aineistonanalyysi on määrällinen, koska piirustuksista tutkitaan, kuinka monen oppilaan piirustuksessa eri geometrian sisällöt esiintyvät tai kuinka moni oppilas on kuvannut geometrian opetusta samalla tavalla. (Stiles, Adkisson, Sebben & Tamashiro, 2008, 1–10.)

Piirrosanalyysin on todettu sopivan erityisen hyvin silloin, kun tutkimuskohteena ovat lapset. Esimerkiksi haastatteluissa lapsen voi olla haastavaa kertoa ajatuksistaan monisanaisesti suppean sanavarastonsa vuoksi. Lisäksi kyselyissä lapsen rajallinen lukutaito voi vaikeuttaa väitteiden ja kysymyksien ymmärtämistä. (Hannula, 2007, s. 199; Tikkanen, 2008, s. 126; Heath ym. 2009, s. 116.) Tutkielmassani piirtäminen edellytti oppilailta muistin aktivoimista asioiden, tapahtumien ja toiminnan mieleen palauttamiseksi. A-luokalla geometrian opiskelusta oli pidempi aika, minkä vuoksi tehtävä edellytti A-luokan oppilailta vahvempaa muistin aktivointia, kuin B-luokan oppilailta. Piirtäminen on lapsille luontaista sekä tuttua toimintaa, minkä vuoksi piirustukset sopivat hyvin tutkielmani asetelmaan, jossa oppilaiden tausta geometrian opetuksen parissa oli hyvin erilainen (Harrison, Clarke & Ungerer, 2007 s. 57-67; Hsu, 2014, s. 59; O'Connor, 2007, s. 277).

Piirustukset ovat myös todettu hyväksi keinoksi tutkia nimenomaan lasten käsityksiä (Laine, Ahtee, Näveri, Pehkonen, Portaankorva-Koivisto & Tuohilampi, 2015, s. 90). Lapsien voi olla vaikea sanoittaa omia käsityksiään. Visuaaliset tutkimusmenetelmät tarjoavat keinon saada esille sen, mikä voi olla hankala tuoda verbaalisesti esille. Tämän johdosta piirrosanalyysi sopii tutkielmani aiheeseen. (Pink, 2004, 4, 36.) Myös Malchiodin (1998, s. 7-9) mukaan lapsi pystyy visuaalisin keinoin tuomaan esille omia käsityksiään ja ajatuksiaan sekä ilmaisemaan useita asioita samassa piirustuksessa. Tähän Kitahara ja Matsuishi (2001, s. 10) lisäävät, että lapset pystyvät piirtämällä välittämään enemmän tietoa, koska heidän kielellinen ilmaisunsa ei välttämättä vielä riitä itsensä ilmaisuun. Etenkin erilaisten tunteiden ilmaisuun piirtäminen tarjoaa helpomman keinon kielelliseen ilmaisuun verrattuna. Lapset ovat kuitenkin yksilöitä ja heidän yksilölliset ominaisuudet sekä sosiaaliset- ja motoriset taidot vaikuttavat piirustuksien tuottamiseen. (Kitahara & Matsuishi, 2001, s.10; Elden, 2012, s. 67-68.)

5.4 Aineiston analysointi

Aineiston analysointia varten sain Ana Kuzlelta käyttööni hänen laatimansa analysointivälineet. Molempien piirustuksien analysointivälineet olivat listamuotoiset taulukot, joihin merkittiin rasteja sen mukaan, mitä kunkin oppilaan piirustuksessa esiintyi. Analysoin ensin kaikki geometriaa kuvaavat piirustukset ja sen jälkeen geometrian opetusta kuvaavat piirustukset. Alussa käsittelin piirustuksia luokka-kohtaisesti analysoinnin selkeyttämiseksi. Säilyttääkseni yhteneväisen linjan jokaisen piirustuksen kohdalla tein muistiinpanoja piirustuksista tekemistäni havainnoista sekä erityisesti ongelmakohtissa tekemistäni ratkaisuksista. Palasin analyysissä useita kertoja taaksepäin ja tarkistin, että merkitsin rasteja samoilla perusteilla. Lopuksi kävin piirustukset vielä kertaalleen läpi satunnaisina ryhminä ja varmistin analyysin yhtenevyyden. Lopputarkistukseen sekoitin luokkien piirustukset ja muodostin satunnaiset noin viiden piirustuksen ryhmät tämän pohjalta. Piirustuksien sekoittamisella halusin varmistaa, ettei luokkien väliltä löydy eroja rastien merkitsemisissä.

Geometriaa kuvaavien piirustuksien analysointi

Tutkielmassa geometriaa kuvaavia piirustuksia tutkittiin lista muotoisen analysointivälineen avulla. Siinä piirustuksissa havainnoitavat asiat olivat jaoteltu seitsemän eri aihealueen mukaan ja otsikoitu aihealuetta kuvaavasti. Aihealueina olivat geometriset muodot ja niiden rakentelu (F1), operointi muodoilla (F2), koordinaatit ja suhteet (F3), mittaaminen (F4), geometriset kuviot (F5), geometriset muodot ympäristössä (F6) sekä muut geometriset asiat (F7). Aihealueiden sisällöt olivat eriteltty allekkain ja niiden lukumäärät vaihtelivat aihealueesta riippuen. Alta löytyvät ulottuvuuksien sisällöt, joiden pohjalta merkitsin rasteja analysointivälineen pohjalta tekemääni taulukkoon (liitteet 3 ja 4).

F1: Geometriset muodot ja niiden rakentelu

- pisteet, viivat, kulmat, tasokuviot, kappaleet, ominaisuudet, rakentelu, piirtäminen ja yhdistelmäkuviot

F2: Muodoilla operointi

- käännökset, kierrot, pienennös, suurennos, symmetria pisteen ja suoran suhteen, yhdenmukaisuus, hajoitelmat, ruudutus ja taitokset

F3: Koordinaatit ja suhteet

- koordinaatisto, sijaintisuhteet, suunnat sekä avaruudellisuus

F4: Mittaaminen

- pituus, piiri, pinta-ala, tilavuus, kulman suuruus, mittausvälineet, arviointi, yksikkömuunnokset ja skaalaus

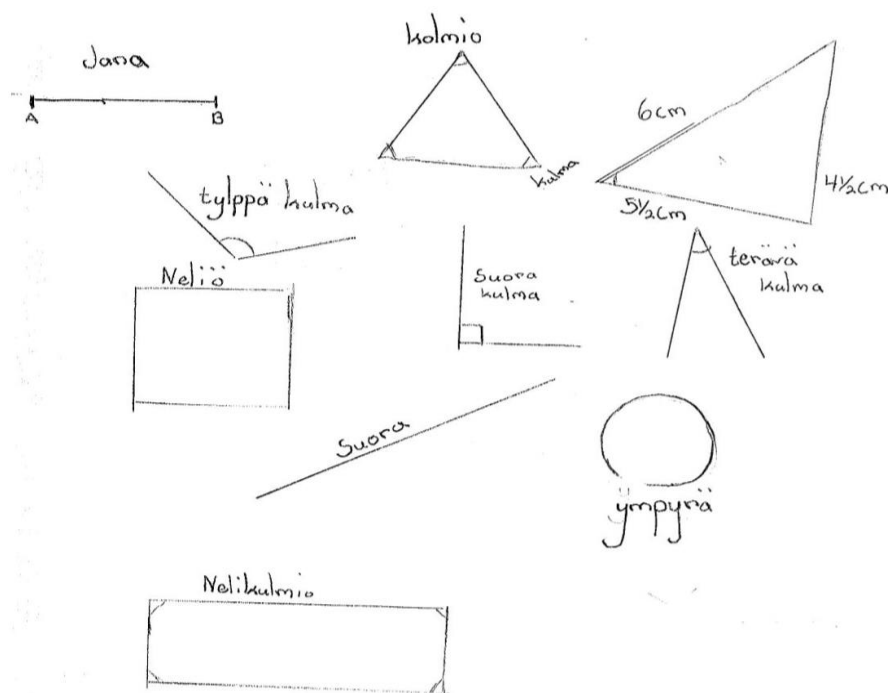
F5: Geometriset kuviot

F6: Geometriset muodot ympäristössä

F7: Muut geometriset asiat eli geometrisyys

- ongelmat, laskelmat, geometriset faktat ja projektiot.

Havainnollistan aineiston analysointia analysoimalla malliksi yhden geometriaa kuvaavan piirustuksen, joka näkyy kuviossa 6.



Kuvio 6. Esimerkki 3. luokkalaisen oppilaan geometriaa kuvaavasta piirustuksesta (B-luokka, tyttö)

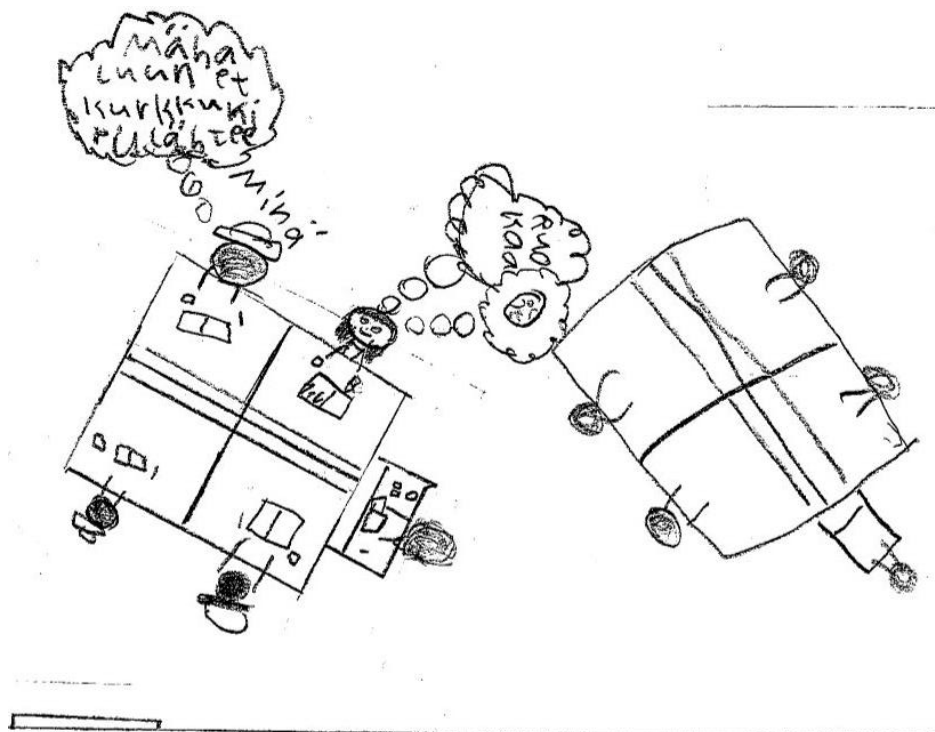
Kuviossa 6 näkyvästä piirustuksesta löytyy pisteitä, viivoja, kulmia, tasokuvioita sekä sivujen pituuksia. Piirustuksesta kertyi yhteensä kymmenen rastia, joista yksi tuli pisteistä, kaksi viivoista, kolme tasokuvioista, kolme kulmista ja yksi pituuden kuvauksesta. Pisteet ilmenivät piirustuksessa janan päätepisteinä, viivat suorana ja janana, kulmat suorana-, terävänä- sekä tylppänä kulmana, tasokuviot ympyröinä, kolmioina sekä nelikulmioina. Kolmioita oppilas oli piirtänyt kaksi erilaista. Yhden tasasivuisen kolmion ja yhden suorakulmaisen kolmion. Nelikulmioista oppilas oli piirtänyt neliön sekä suorakulmion. Kolmioista ja neliöistä merkitin kummastakin yhden rastin, koska päätin analysoinnin selkeyttämiseksi rajata tasokuvioista kertyvät rastit kulmien lukumäärän mukaan. Pituuden kuvaus ilmeni oppilaan piirustuksessa kolmion sivujen pituuksina, jotka oppilas oli merkinnyt senttimetreinä. Geometristen muotojen lisäksi oppilas oli nimennyt kaikki piirtämänsä muodot.

Geometrian opetusta kuvaavien piirustuksien analysointi

Myös geometrian opetusta kuvaavia piirustuksia tutkittiin listamuotoisen analysointivälineen avulla. Siinä piirustuksista havainnoitavat asiat olivat jaoteltu kol-

men ulottuvuuden mukaan ja otsikoitu ulottuvuutta kuvaavasti. Ulottuvuudet olivat suhteet (1), tavoite (2) sekä tavat ja järjestys (3). Ulottuvuudet olivat kokonaisuuksia, jotka olivat jaettu tarkempiin aihealueisiin. Ensimmäisen ulottuvuuden eli suhteiden aihealueet olivat opettajan sanallinen ja ei-sanallinen viestintä, oppilaiden sanallinen ja ei-sanallinen viestintä sekä menetelmä. Toisessa aihealueessa eli tavoitteissa oli yksi aihealue, joka oli oppitunnin sisältö sekä opetusmateriaali. Kolmanteen aihealueeseen eli tapoihin ja järjestykseen kuuluivat järjestyksen ja käytöksen ylläpitäminen sekä luokkahuoneen istumajärjestys.

Ulottuvuudet olivat merkitty analysointivälineeseen luvuilla 1, 2 ja 3 ja aihealueet ulottuvuuksien alle koodeilla 1a - 3b. Piirustuksista havainnoitavat asiat löytyivät analysointivälineestä D-alkuisilla koodeilla aihealueiden alta. Merkitsin piirustuksista kertyneet rastit analysointivälineen pohjalta tekemääni taulukkoon, jossa näkyvät myös kaikki piirustuksista havainnoitavat asiat tarkemmin eriteltyinä (liite 5 ja 6). Havainnollistan myös geometrian opetusta kuvaavien piirustuksien analysointia analysoimalla malliksi kuviossa 7 näkyvän piirustuksen.



Kuvio 7: Esimerkki 3. luokkalaisen oppilaan geometrian opetusta kuvaavasta piirustuksesta (A-luokka, tyttö)

Suhteiden osalta piirustuksesta havainnoitavat asiat olivat opettajan sijainti, opettajan välittämä tuki, oppilaiden sijainti, oppilaiden osallistuminen, oppilaiden välinen kommunikointi sekä opetusmenetelmä. Kuviosta 7 nähdään, että piirustuksessa ei ole opettajaa, minkä johdosta piirustuksesta ei myöskään ilmene opettajan välittämää tukea. Piirustuksessa oppilaat istuvat pulpettien ääressä ja tekevät tehtäviä. Piirustuksessa ei näy matemaattista keskustelua eikä ajattelua, vaan oppilaiden ajatuskuplat käsittelevät ruokaa sekä kurkkukipua. Piirustuksessa opetusmenetelmä keskittyy oppilaiden itsenäiseen työskentelyyn eikä piirustuksessa näy oppilaiden välistä vuorovaikutusta. Toisen ulottuvuuden osalta tarkasteltiin oppitunnin sisältöä sekä opetusmateriaalia, joista kumpikaan ei välittynyt piirustuksesta. Kolmannen ulottuvuuden eli tapojen ja järjestyksen osalta tarkasteltiin käytöksen ja järjestyksen ylläpitoa sekä luokkatilan istumajärjestystä. Piirustuksessa ei ilmennyt järjestyksen ja käytöksen ylläpitoa, mutta sen sijaan istumajärjestys oli näkyvissä. Oppilaat istuivat pöytäryhmittäin.

6 Oppilaiden käsitykset geometriasta

Tutkielmassani selvitettiin, minkälaisia käsityksiä kolmasluokkalaisten oppilaiden tekemissä piirustuksissa esiintyi geometriasta ja geometrian opetuksesta. Kahdessa seuraavassa luvussa esittelen tuloksia tutkimuskysymyksien mukaisessa järjestyksessä. Tutkimuskysymyksien sisällä tuloksien tarkastelun runko rakentuu analysoinnissa käytetyn analysointivälineen rakenteen pohjalta (liitteet 3 ja 4). Tässä luvussa käsittelen oppilaiden käsityksiä geometriasta.

6.1 Oppilaiden käsityksien tarkastelu

Luokilla oli erilainen tausta geometrian opetuksessa. B-luokalla geometriaa oli opiskeltu edeltävän kuukauden aikana ja A-luokalla edeltävällä luokka-asteella. Tarkastelen tuloksia luokkakohtaisesti sekä luokkia keskenään vertaillen. Luokkien tulokset ovat koottu peräkkäisiin taulukoihin. Taulukoiden alapuolella olevissa tuloksien käsittelyosioissa luokat ovat rinnakkain, jotta luokkien välinen vertailu olisi selkeää. Yhteenvedo-osioon on koottu tärkeimmät tulokset tiivistetysti.

Taulukoissa tulokset ovat ilmoitettu lukuina sekä prosentteina. Prosentit mahdollistavat luokkien vertailun eri suuruisista oppilasmääristä huolimatta. Prosentit kertovat, mikä osa koko luokan oppilasmäärästä, tytöistä tai pojista on piirtänyt tarkasteltavaa aihealuetta tai sisältöä piirustukseensa. Kaikissa taulukoissa prosentit ovat pyöristetty lähimpään kokonaislukuun. Luvut puolestaan kuvastavat oppilasmääriä, joiden pohjalta prosentit ovat laskettu. Oppilasmäärät kertovat, kuinka monen oppilaan piirustuksesta löytyi tarkasteltavaa aihealuetta tai sisältöä. Luokalla A oppilaita oli 23, joista 13 oli tyttöjä ja 10 poikia. Luokalla B oppilaita oli 24, joista 12 oli tyttöjä ja 12 poikia.

6.2 Oppilaiden käsitykset aihealueittain

Hyödynnän tuloksien tarkastelussa analysointivälineen mukaista rakennetta sekä aihealueiden sisällöissä käytettyä järjestystä esitellessäni oppilaiden piirustuksista saatuja tuloksia (liitteet 3 ja 4). Lähden tuloksissa liikkeelle aihealueiden

yleisestä tarkastelusta, josta etenen aihealue kohtaisiin tuloksiin. Alla oleviin luokakohtaisiin taulukoihin 5 ja 6 on koottu aihealueiden esiintymistä koskevat tulokset luokilla A ja B.

Taulukko 5. Aihealueet oppilaiden piirustuksissa luokalla A

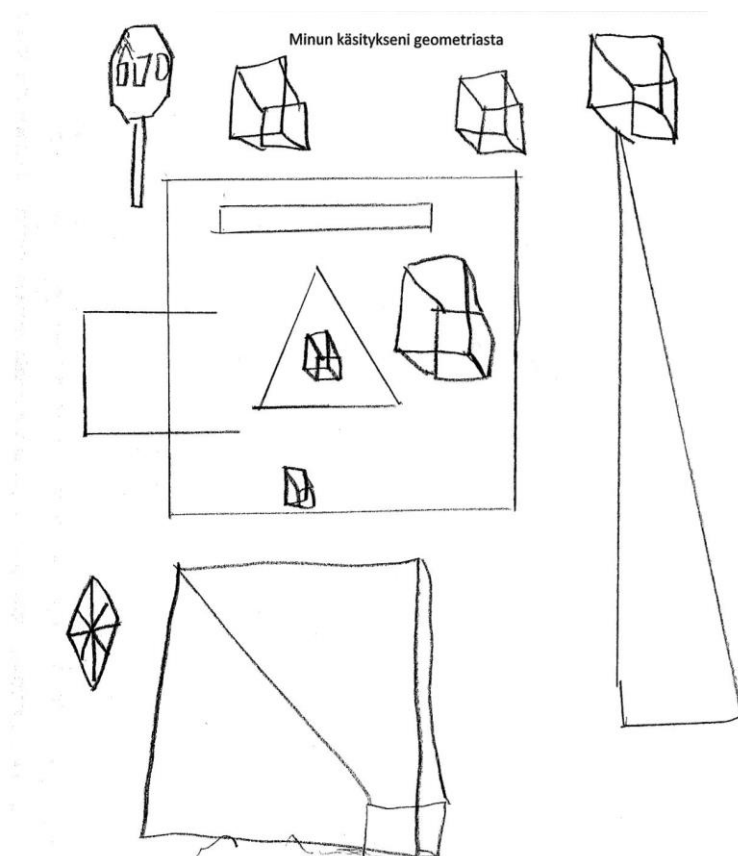
Aihealue	Oppilaat		Työt		Pojat	
	A	%	A	%	A	%
F1: Geometriset muodot ja niiden rakentelu	23	100	13	100	10	100
F2: Operointi muodoilla	3	13	2	15	1	10
F3: Koordinaatit ja sijaintisuhteet	0	0	0	0	0	0
F4: Mittaaminen	4	17	2	15	2	20
F5: Geometriset kuviot	0	0	0	0	0	0
F6: Geometriset muodot ympäristössä	10	43	6	46	4	40
F7: Muut geometriset asiat	1	4	0	0	1	10

Taulukko 6. Aihealueet oppilaiden piirustuksissa luokalla B

Aihealue	Oppilaat		Työt		Pojat	
	B	%	B	%	B	%
F1: Geometriset muodot ja niiden rakentelu	24	100	12	100	12	100
F2: Operointi muodoilla	4	17	2	17	2	17
F3: Koordinaatit ja sijaintisuhteet	2	8	1	4	1	4
F4: Mittaaminen	6	25	6	50	0	0
F5: Geometriset kuviot	0	0	0	0	0	0
F6: Geometriset muodot ympäristössä	5	21	2	17	3	25
F7: Muut geometriset asiat	0	0	0	0	0	0

Taulukosta 5 havaitaan, että A-luokalla oppilaiden piirustuksissa oli eniten geometrisiä muotoja ja niiden ominaisuuksia sekä geometrisiä muotoja ympäristössä sekä tytöillä että pojilla. Näistä kahdesta aihealueesta ensimmäinen esiintyi jokaisen oppilaan piirustuksessa ja jälkimmäinen kymmenen oppilaan piirustuksessa. Taulukosta 6 nähdään, että myös B-luokalla geometriset muodot ja niiden rakentelu esiintyivät jokaisen oppilaan piirustuksessa sekä tytöillä että pojilla. Sen

sijaan geometrisia muotoja ympäristössä löytyi vain viiden oppilaan piirustuksesta. Tämä on 21% koko luokan oppilasmäärästä, kun A-luokalla vastaava osuus oli 43%. Kuvioissa 8 on esimerkki piirustuksesta, jossa on geometrisia muotoja sekä geometrisiä muotoja ympäristössä. Kuviossa 8 liikennemerkki on koodattu ympäristön geometriseksi muodoksi.

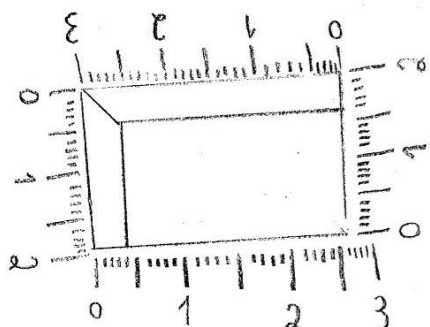
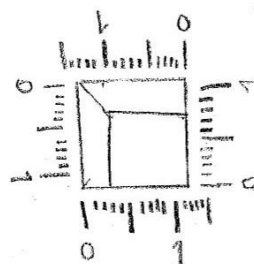
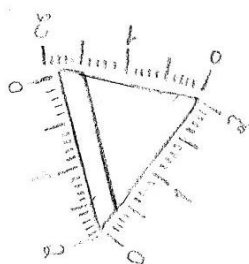


Kuvio 8. Esimerkki piirustuksesta, jossa esiintyy geometrisia muotoja sekä geometrisia muotoja ympäristössä (A-luokka, poika)

Taulukosta 6 nähdään myös, että geometrysten muotojen ja niiden ominaisuuksien lisäksi B-luokan piirustuksissa esiintyi muodoilla operointia, koordinaatteja ja sijaintisuhteita sekä mittaamista. Näistä mittaamista löytyi eniten ja se oli toiseksi yleisin aihealue B-luokan piirustuksissa. Mittaamisen osuus oli 25%. Tässä sukupuolten välillä oli kuitenkin eroa ja mittaamista esiintyi vain tyttöjen piirustuksissa. Puolet luokan tytöistä eli 50% toi piirustuksessaan esille mittaamista joko toimintana tai mittausvälineinä. Muodoilla operointia sekä koordinaatteja ja sijaintisuhteita esiintyi vain yksittäisten oppilaiden piirustuksissa eikä sukupuolten vä-

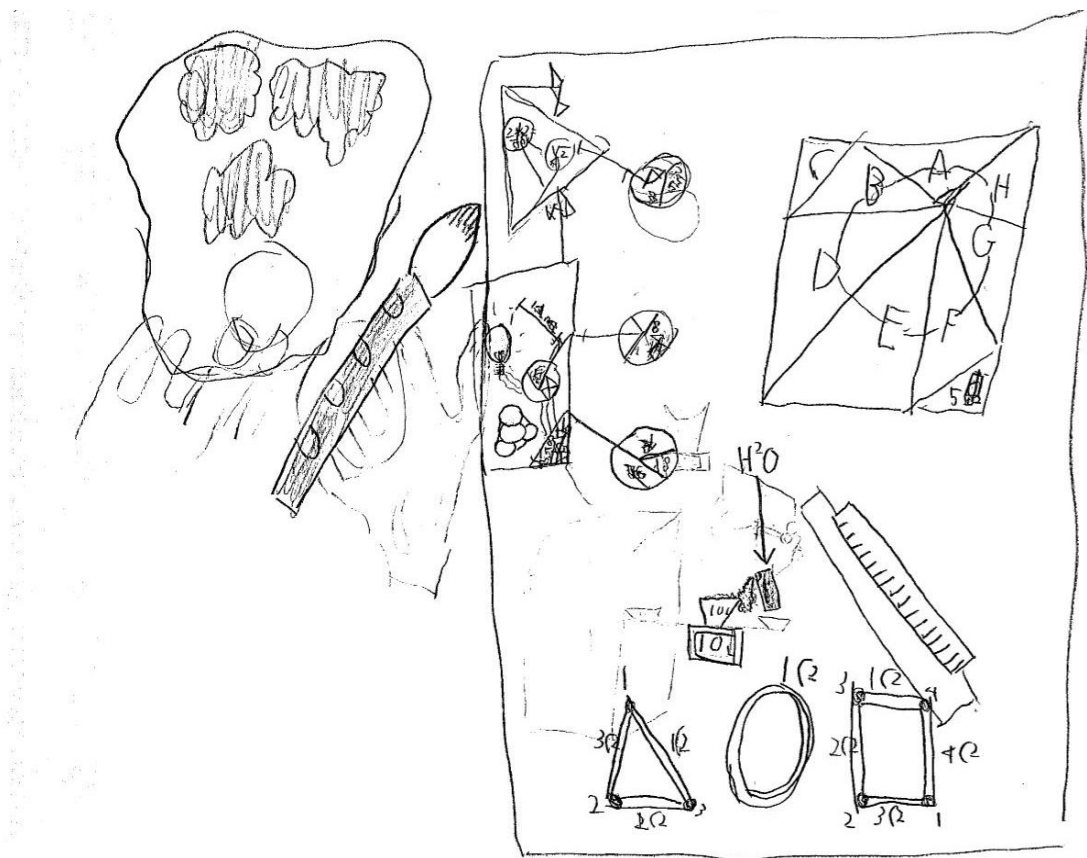
lillä ollut juurikaan eroja. Geometrisia kuvioita tai muita geometrisia asioita ei löytynyt B-luokan piirustuksista ollenkaan. Kuviossa 9 on esimerkki piirustuksesta, jossa oppilas on sanoin sekä piirtämällä kertonut geometrian olevan mittaamista.

kuvioiden
geometria on \downarrow mittaamista



Kuvio 9. Esimerkki piirustuksesta, jossa on mittaamiseen liittyviä asioita (B-luokka, tyttö)

Taulukosta 5 huomataan, että A-luokalla mittaamisen osuus oli 17% eli hieman vähemmän kuin B-luokalla eikä sukupuolten välillä ollut eroja. Myös A-luokalla oppilaiden piirustuksissa esiintyi muodoilla operointia ja B-luokan tavoin sitä ilmeni vain yksittäisten oppilaiden piirustuksissa. Lisäksi yhden A-luokan oppilaan piirustuksesta löytyi muiksi geometrisiksi asioiksi laskettavaa sisältöä eli esimerkiksi laskelmia ja geometrisia ongelmia. A-luokalla koordinaatteja ja sijaintisuhteita tai geometrisia kuvioita ei esiintynyt piirustuksissa ollenkaan. Kuviossa 10 on esimerkki piirustuksesta, jossa on monenlaisia geometrisia ongelmia sekä niiden yhteyteen kirjoitettuja laskelmia.



Kuvio 10. Esimerkki piirustuksesta, jossa on geometrisia ongelmia sekä laskelmia (A-luokka, poika)

Analysointivälineessä aihealueisiin kertyi rasteja aihealueiden sisältöjen perusteella. A-luokan piirustuksista rasteja kertyi yhteensä 124, josta 61 tuli tyttöjen piirustuksista ja 63 poikien piirustuksista. B-luokalla rasteja kertyi 187, josta 102 tuli tyttöjen piirustuksista ja 85 poikien piirustuksista. B-luokan suurempi rasti määrä johtuu todennäköisesti siitä, että luokka oli opiskellut geometriaa juuri ennen piirustuksien tekoa ja asiat olivat tuoreessa muistissa. A-luokalla tyttöjen rasti osuus oli 49% ja poikien 51%. B-luokalla vastaavat osuudet olivat 55% ja 45%. A-luokalla tyttöjä oli 13 ja poikia 10, minkä johdosta osuudet eivät ole suoraan vertailukelpoisia. Niistä voidaan kuitenkin todeta, että poikien piirustuksista kertyi enemmän rasteja. Poikien pienemmästä oppilasmäärästä johtuen, poikien osuus on todellisuudessa vielä suurempi. B-luokalla tyttöjä ja poikia oli saman verran, joten prosenteista voidaan suoraan sanoa, että tyttöjen osuus rasteissa oli suurempi. Luokkien tilanteet olivat siis päinvastaiset toisiinsa nähden.

Rastimääristä nousi esille toinenkin tärkeä havainto. Molemmilla luokilla oppilaiden piirustuksissa esiintyi eniten geometrisia muotoja ja niiden ominaisuuksia. A-luokalla aihealueesta kertyi 100 rastia, mikä oli 81% kokonaisrastimäärästä. Myös B-luokalla suurin osa rasteista tuli tästä aihealueesta. B-luokalla rastien määrä oli 168, mikä oli 90% kokonaisrastimäärästä. Tämän pohjalta voidaan todeta, että oppilaiden käsitys geometriasta muodostuu pääosin geometrisista muodoista ja niiden ominaisuuksista.

Käsittelen seuraavaksi aihealuekohtaisia tuloksia. Lähden tuloksien tarkastelussa liikkeelle geometrisista muodoista ja niiden ominaisuuksista, koska niitä esiintyi eniten oppilaiden piirustuksissa molemmilla luokilla. Tämän jälkeen siirryn toiseksi yleisimpien aihealueiden käsittelyyn, missä luokkien välillä oli eroja. A-luokalla toiseksi yleisin aihealue oli geometriset muodot ympäristössä ja B-luokalla mittaaminen. Käsittelen nämä samassa alaluvussa molempien luokkien osalta. Lopuksi käsittelen jäljelle jääneet aihealueet eli operointi muodoilla, koordinaatit ja sijaintisuhteet, geometriset kuviot sekä muut geometriset asiat, joita esiintyi vähiten oppilaiden piirustuksissa molemmilla luokilla. Tulokset ovat jaettu siis kolmeen alalukuun aihealueiden esiintyvyyden perusteella.

Geometriset muodot ja niiden rakentelu

Ensimmäiseen aihealueeseen eli geometrisiin muotoihin ja niiden ominaisuuksiin kuuluivat pisteet, viivat, kulmat, tasokuviot, kappaleet, geometriset ominaisuudet, kuvioden yhdistelmät sekä piirtäminen ja rakentelu toimintana. Alla oleviin taulukoihin 7 ja 8 on koottu aihealueen tulokset molemmilta luokilta. Tulokset ovat ilmoitettu lukuina, jotka kuvaavat oppilasmääriä kunkin sisällön kohdalla. Lisäksi taulukoihin on merkitty tyttöjen sekä poikien osuudet prosentteina. Prosentit kertovat, mikä osa koko luokan oppilasmäärästä, tytöistä tai pojista on piirtänyt kyseistä sisältöä piirustukseensa.

Taulukko 7. Aihealueen geometriset muodot ja niiden rakentelu (F1) sisällöt oppilaiden piirustuksissa luokalla A

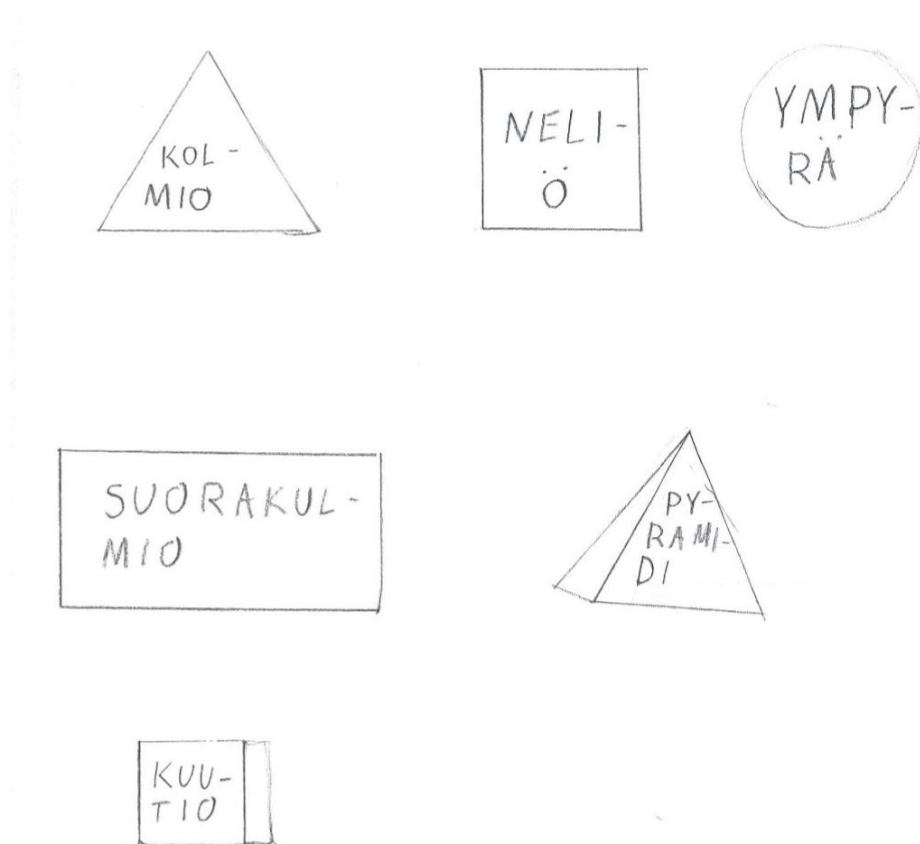
F1	Oppilaat		Tytöt		Pojat	
	A	%	A	%	A	%
Pisteet	0	0	0	0	0	0
Viivat	5	22	2	15	3	30
Tasokuviot	19	83	9	69	10	100
Kappaleet	21	91	12	92	9	90
Ominaisuudet	1	4	0	0	1	10
Piirtäminen	2	9	1	8	1	10
Rakentelu	0	0	0	0	0	0
Kulmat	1	4	0	0	1	10
Yhdistelmäkuvio	9	39	2	15	7	70

Taulukko 8. Aihealueen geometriset muodot ja niiden rakentelu (F1) sisällöt oppilaiden piirustuksissa luokalla B

F1	Oppilaat		Tytöt		Pojat	
	B	%	B	%	B	%
Pisteet	6	25	3	25	3	25
Viivat	8	33	4	33	4	33
Tasokuviot	24	100	12	100	12	100
Kappaleet	18	75	9	75	9	75
Ominaisuudet	3	13	2	17	1	8
Piirtäminen	3	13	3	25	0	0
Rakentelu	0	0	0	0	0	0
Kulmat	11	46	6	50	5	42
Yhdistelmäkuvio	5	21	2	17	3	25

Taulukoista 7 ja 8 huomataan, että molemmilla luokilla oppilaiden piirustuksista löytyi eniten tasokuvioita ja kappaleita sekä tytöillä että pojilla. A-luokan oppilaista 83% piirsi tasokuvioita ja 91% kappaleita eli kappaleita esiintyi useamman oppilaan piirustuksessa kuin kappaleita. B-luokalla tilanne oli toisinpäin ja vastaavat

osuudet olivat 100% tasokuvioiden kohdalla ja 75% kappaleiden kohdalla. Kuviossa 11 on esimerkki piirustuksesta, jossa esiintyi tasokuvioita sekä kappaleita.



Kuvio 11. Esimerkki piirustuksesta, jossa on erilaisia tasokuvioita ja kappaleita (A-luokka, tyttö)

Taulukosta 7 nähdään, että A-luokalla oppilaiden piirustuksista löytyi toiseksi eniten viivoja (22%) ja yhdistelmäkuviota (39%). Näiden lisäksi yksittäiset oppilaat olivat piirtäneet ominaisuuksiin, piirtämiseen sekä kulmiin liittyviä asioita. Näissä prosenttiosuudet vaihtelivat 4% ja 9% välillä. Sen sijaan pisteitä tai geometrian rakenteluun viittaavia asioita ei ilmennyt yhdenkään oppilaan piirustuksessa. Kuviossa 12 on esimerkki piirustuksesta, jossa on viivoja. Oppilas on piirtänyt viivoja avoimina suorina keskelle piirustusta sekä piirustuksen yläreunaan.

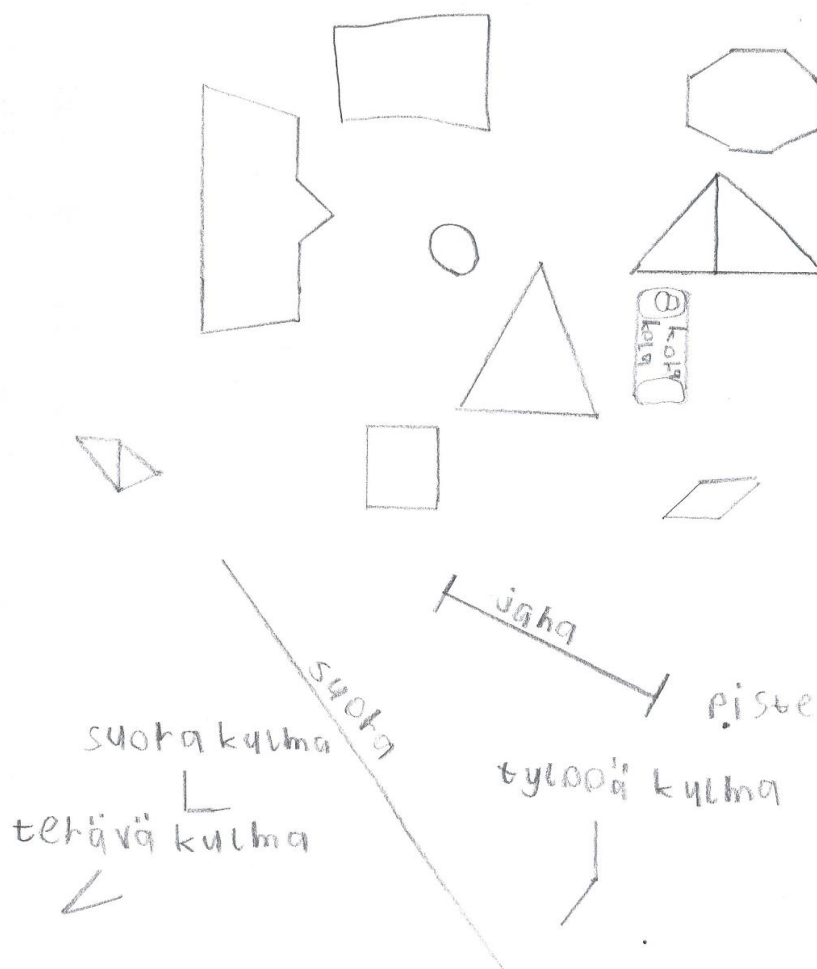


Kuvio 12. Esimerkki piirustuksesta, jossa on viivoja (A-luokka, tyttö)

Taulukosta 8 ilmenee, että B-luokalla kulmat (46%) olivat toiseksi yleisin sisältö piirustuksissa. Moni oppilas oli osannut piirtää sekä mahdollisesti myös nimetä suoran-, terävän- ja tylpän kulman. Myös pisteitä, viivoja ja yhdistelmäkuviota löytyi usean oppilaan piirustuksesta. Niissä prosenttiosuudet vaihtelivat 21% ja 33% välillä. Näiden ohella muutaman oppilaan piirustuksesta löytyi ominaisuuksiin (13%) ja piirtämiseen (13%) viittaavia asioita. Sisällöistä rakentelu eli geometrian tekeminen materiaalista oli ainut, mikä ei esiintynyt ollenkaan B-luokan oppilaiden piirustuksissa. Kuviossa 13 on esimerkki piirustuksesta, josta löytyy yhdistelmäkuvio. Kuviossa 14 on esimerkki piirustuksesta, jossa oppilas on piirtänyt sekä nimennyt kulmia ja viivoja piirustukseensa.



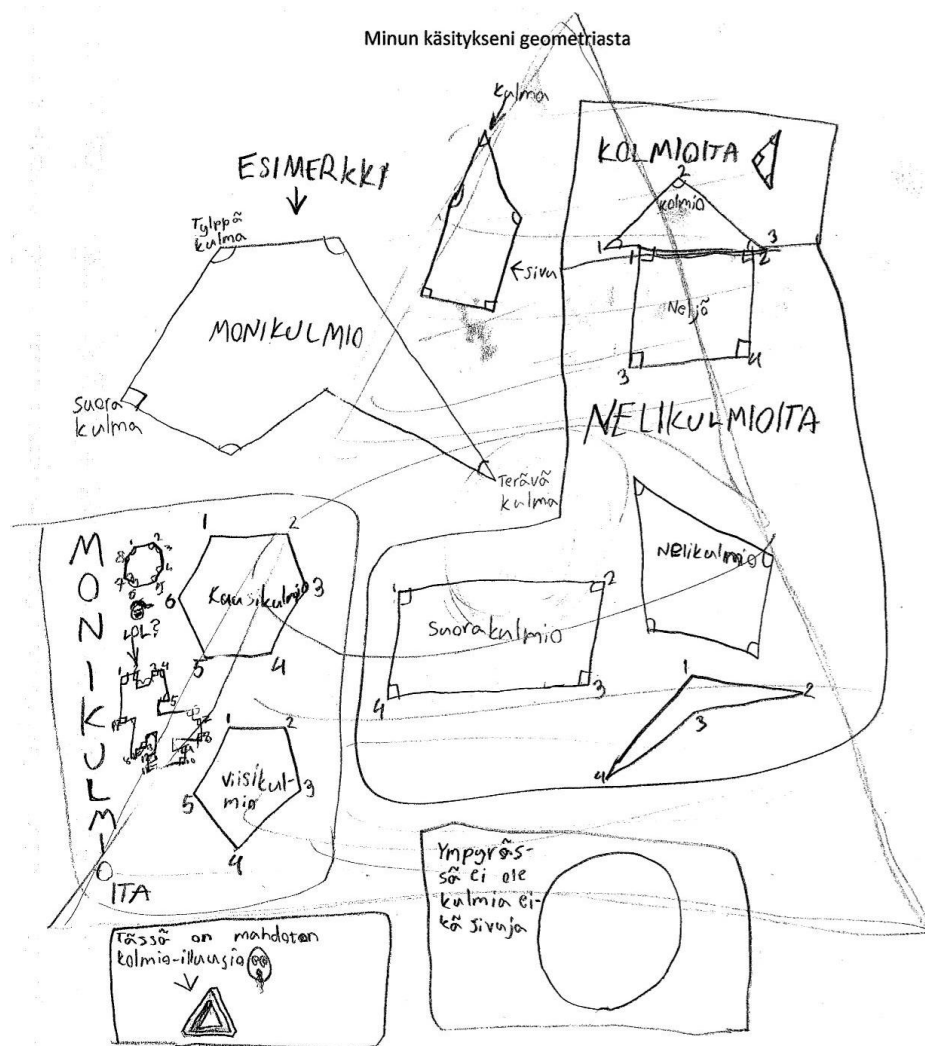
Kuvio 13. Esimerkki piirustuksesta, jossa on yhdistelmäkuviio (B-luokka, tyttö)



Kuvio 14. Esimerkki piirustuksesta, jossa on kulmia ja viivoja (B-luokka, poika)

Molemmilla luokilla sisältöjen välisissä rastimäärissä oli yhtäläisyyksiä sekä eroja. Sekä A- että B-luokalla suurin osa rasteista kertyi tasokuvioista ensimmäisen aihealueen eli geometrinen muotojen ja niiden ominaisuuksien sisällä. A-luokalla tasokuvioiden osuus oli 52% rasteista ja B-luokalla 51%. Merkittäviä sukupuolten välisiä eroja tasokuvioissa ei ilmennyt kummallakaan luokalla. A-luokalla toiseksi eniten rasteja kertyi kappaleista 30%:n osuudella. B-luokalla vastaava osuus oli 13%. B-luokalla toiseksi eniten rasteja kertyi kulmista, joiden osuus kokonaisrastimäärästä oli 18%. A-luokalla kulmien osuus oli ainoastaan 1%:n verran. Molemmilla luokilla muita sisältöjä löytyi vain vähän ja niiden rastimäärien osuudet vaihtelivat 0% ja 9% välillä.

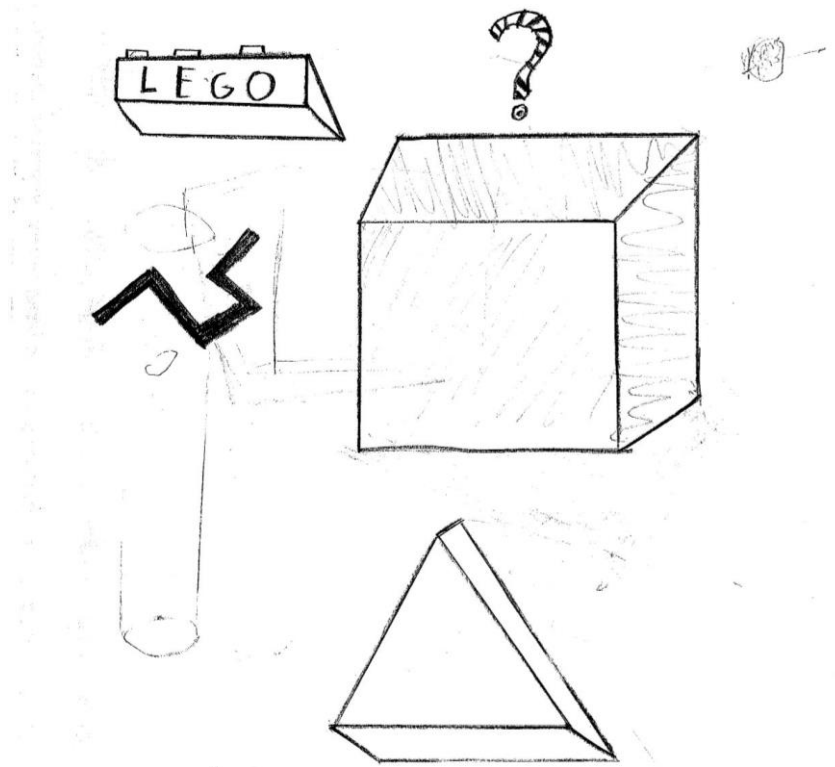
Tuloksien pohjalta voidaan todeta, että tasokuviot korostuvat oppilaiden käsityksessä geometriaa kohtaan molemmilla luokilla. Oppilaiden piirustuksista löytyi ympyröitä, kolmioita, nelikulmioita sekä erilaisia n-kulmioita. Nelikulmioista osa oli piirtänyt useamman erilaisen. Yleisimmät nelikulmiot olivat neliö ja suorakulmio. Tasokuvioiden ohella kappaleet kuuluivat suurimman osan oppilaan käsitykseen geometriasta. Useimmista piirustuksista löytyi yhden tyyppisiä kappaleita, joko lieriöitä tai kartioita. Joistain piirustuksista löytyi kuitenkin useampia erilaisia kappaleita joko piirrettynä tai sanoin kuvailtuna. Vaikka kappaleet esiintyivät useamman oppilaan piirustuksessa A-luokalla (kts. taulukko 7) niin erilaiset tasokuviot olivat oppilaille tutumpia kuin erilaiset kappaleet, minkä seurauksena tasokuvioiden rastimäärä oli huomattavasti suurempi kappaleisiin nähden. Kaiken kaikkiaan tutkittavien kolmasluokkalaisten käsitys geometriasta keskittyi kaksiulotteisiin kuvioihin ja kolmiulotteisiin kappaleisiin. Tämä selittyy alakoulun geometrian opetuksen rakenteella, jossa kaksi- ja kolmiulotteinen maailma on opetuksen keskiössä. Kuviossa 15 on esimerkki piirustuksesta, jossa on monenlaisia tasokuvioita.



Kuvio 15. Esimerkki piirustuksesta, jossa erilaisia monikulmioita (B-luokka, poika)

Geometriset muodot ympäristössä ja mittaaminen

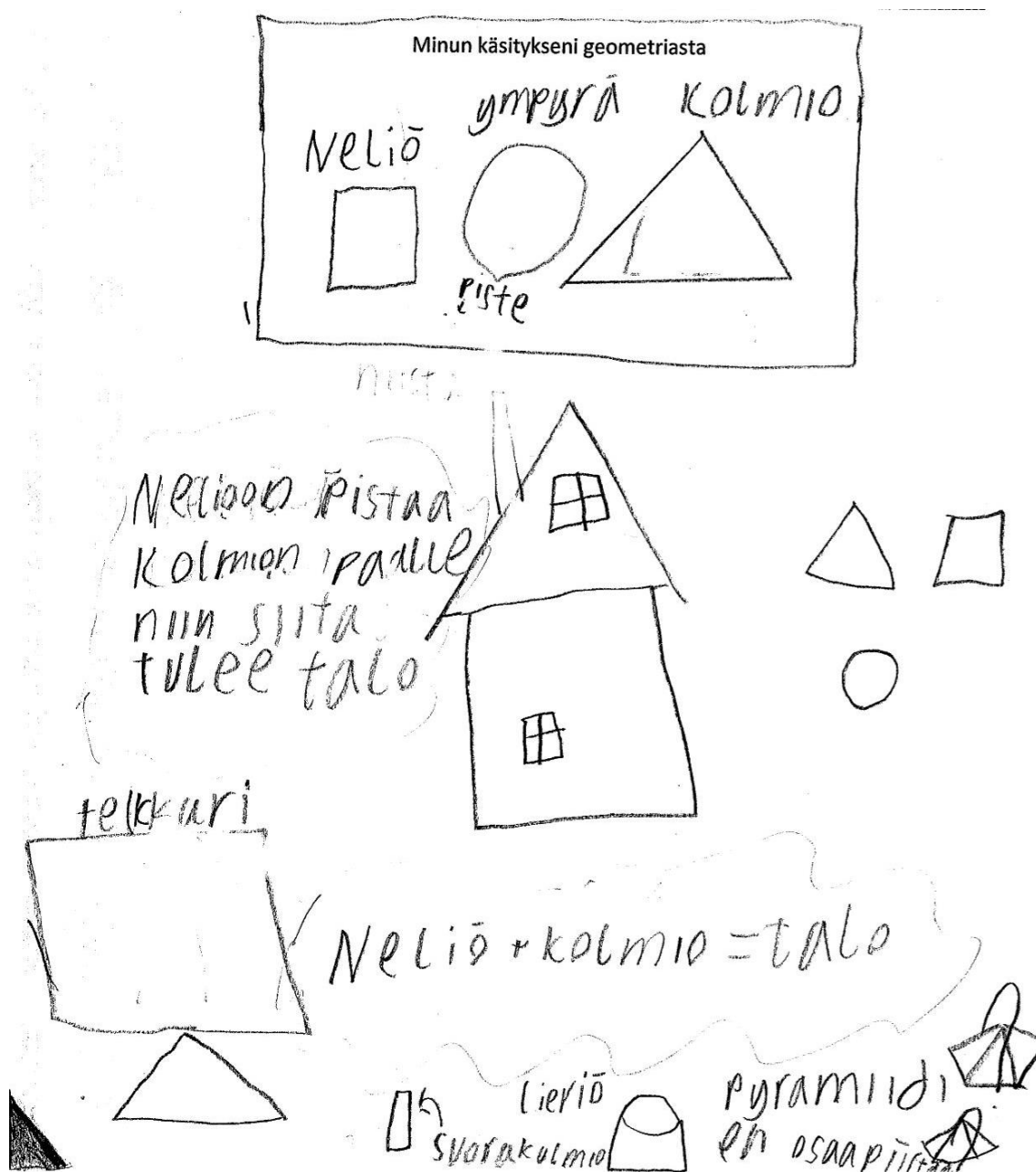
A-luokalla oppilaiden piirustuksissa esiintyi toiseksi eniten ympäristössä olevia geometrisia muotoja. Taulukosta 5 huomattiin, että kymmenen oppilaan piirustuksessa oli jokin ympäristön geometrinen muoto. Näistä kymmenestä oppilaasta kuusi oli tyttöjä ja neljä poikia. Oppilaiden piirustuksissa oli esimerkiksi talon kuvia, legopalikka, Coca Cola -tölkki sekä videopeli, jossa hyödynnetään geometrisia muotoja. Tämän tuloksen pohjalta voidaan todeta, että monen oppilaan käsitykseen geometriasta sisältyy myös ymmärrys geometrian yhteydestä arkielämään ja sen ilmenemisestä ympärillämme. Kuvioissa 16 on esimerkki piirustuksesta, jossa esiintyy geometrisia muotoja ympäristössä.



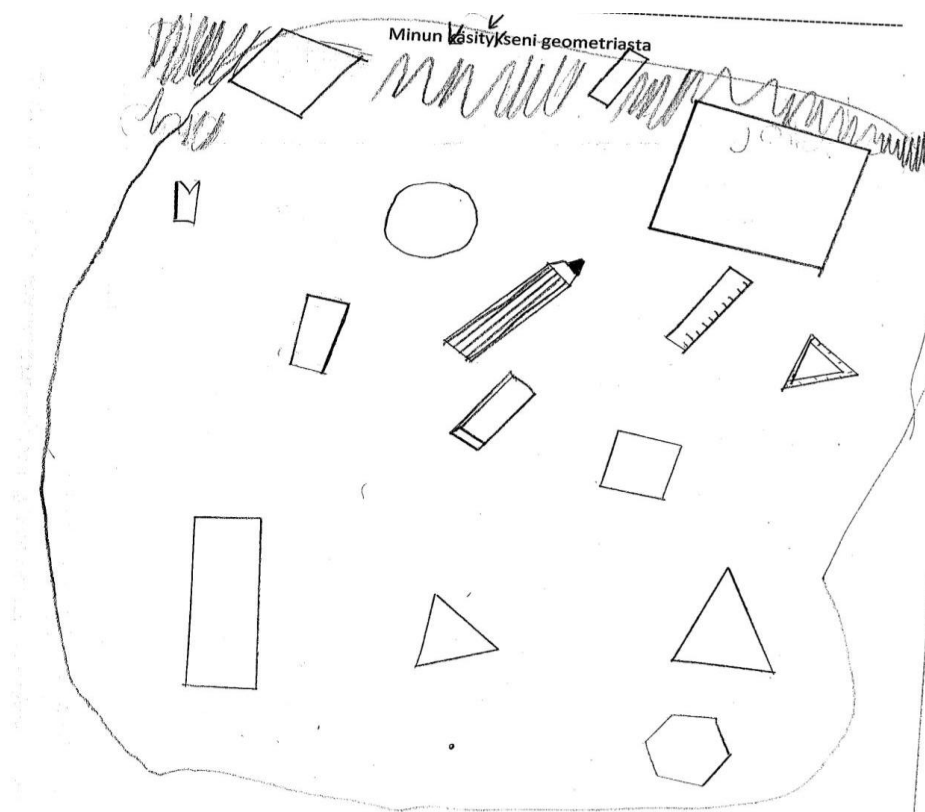
Kuvio 16. Esimerkki piirustuksesta, jossa on ympäristön geometrisia muotoja (A-luokka, poika)

B-luokalla geometrisia muotoja ympäristössä löytyi vain viiden oppilaan piirustuksesta, mikä on 21% koko luokan oppilasmäärästä, kun A-luokalla vastaava osuus oli 43%. Näistä oppilaista kaksi oli tyttöjä ja kolme poikia. Sen sijaan B-luokalla oppilaiden piirustuksissa esiintyi toiseksi eniten mittaamiseen liittyviä asioita. Yhteensä kuusi oppilasta, joista jokainen oli tyttö toi piirustuksessaan esille mittaamista. Ero geometrisiin muotoihin ympäristössä oli kuitenkin vain yhden oppilaan verran. Mittaamisen osuus oli 25%. A-luokalla mittaamista esiintyi neljän oppilaan piirustuksessa, mikä on 17% luokan koko oppilasmäärästä. Mittaamisen osalta suurin ero oli sisältöjen esiintyvyydessä luokkien välillä. B-luokalla oppilaiden piirustuksista löytyi pituuden kuvausta sekä yleisesti mittaamiseen ja mittausvälineisiin liittyviä asioita. Sen sijaan A-luokalla oppilaiden piirustuksista löytyi B-luokan sisältöjen lisäksi piiriin, tilavuuteen sekä kulman mittaamiseen liittyviä asioita. Näistä suurin osa ilmeni saman oppilaan piirustuksessa, josta löytyy jo esimerkki ylempää kuvioista 9. Kuviossa 17 on esimerkki piirustuksesta, jossa on talo ja televisio sekä lisäksi oppilas on selittänyt talon rakentuvan kolmiosta ja

neliöstä. Talo ja televisio ovat koodattu ympäristön geometrisiksi muodoiksi. Toisessa esimerkissä eli kuviossa 18 on esimerkki piirustuksesta, josta löytyy kaksi erilaista mittausvälinettä. Toinen on viivoitin ja toinen kulmaviivain, jota ei esiintynyt muiden oppilaiden piirustuksissa.



Kuvio 17. Esimerkki piirustuksesta, jossa on ympäristön geometrisia muotoja (B-luokka, poika)



Kuvio 18. Esimerkki piirustuksesta, jossa on mittausvälineitä (B-luokka, tyttö)

Oppilaiden piirustuksissa vähiten esiintyneet aihealueet

Edeltävien aihealueiden lisäksi yksittäisten oppilaiden piirustuksista löytyi muutama muun aihealueen sisältöjä. Lopuista aihealueista ei kuitenkaan esiintynyt kuin yksittäisiä sisältöjä. Piirustuksista löytyneet aihealueet ja niiden sisällöt ovat koottu alla oleviin taulukoihin 9 ja 10.

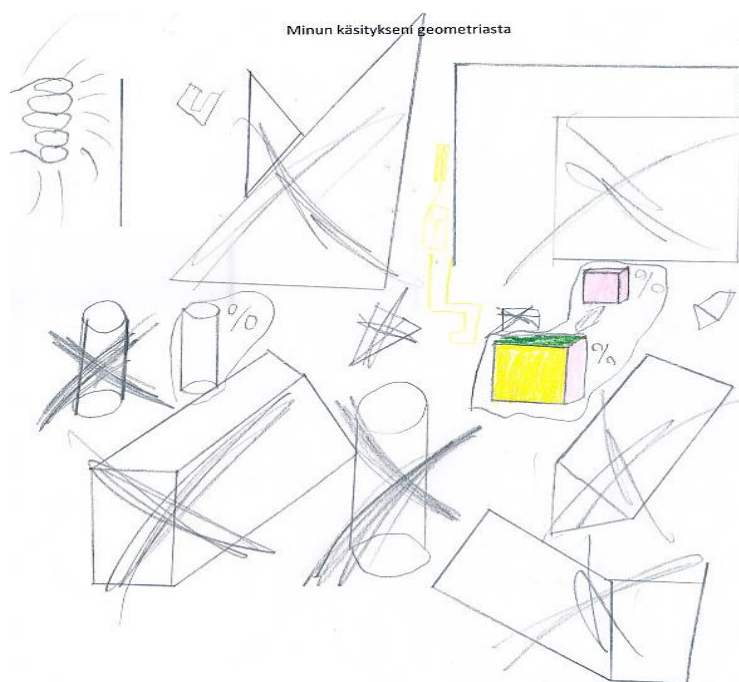
Taulukko 9. Oppilaiden piirustuksissa vähiten esiintyneet aihealueet luokalla A

Aihealue	Sisältö	Oppilaat		Tytöt		Pojat	
		A	%	A	%	A	%
F2: Operointi muodoilla	Pienennös tai suurennos	3	13	2	15	1	10
	Ruudutus	2	9	2	15	0	0
F7: Muut geometriset asiat	Ongelmat	1	4	0	0	1	10
	Laskelmat	1	4	0	0	1	10

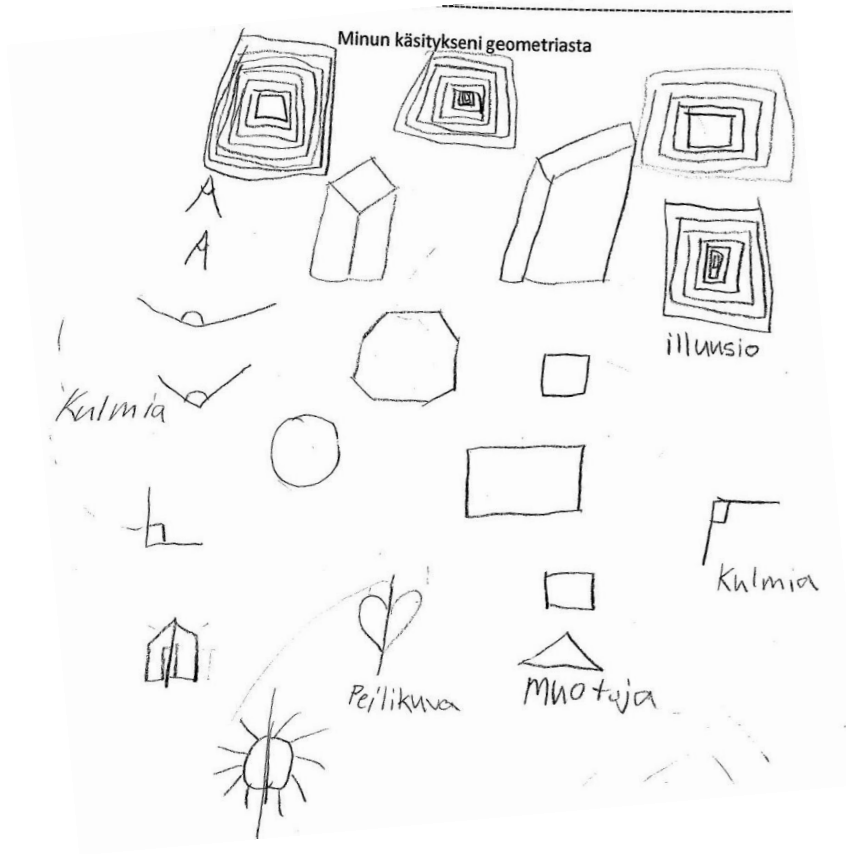
Taulukko 10. Oppilaiden piirustuksissa vähiten esiintyneet aihealueet luokalla B

Aihealue	Sisältö	Oppilaat		Tytöt		Pojat	
		B	%	B	%	B	%
F2: Operointi muodoilla	Pienennös tai suurennos	1	4	0	0	1	8
	Symmetria suoran suht.	3	13	2	17	1	8
F3: Koordinaatit ja sijaintisuhteet	Avaruudellisuus	2	8	1	8	1	8

Taulukoista 9 ja 10 nähdään, että muodoilla operointia löytyi molempien luokkien piirustuksista. A-luokalla kyseisen aihealueen sisältöjä löytyi yhteensä viiden oppilaan piirustuksesta ja B-luokalla neljän oppilaan. Molemmilla luokilla muodoilla operointia ilmeni suurennoksina tai pienennöksinä. Tämän lisäksi kaksi A-luokan oppilasta oli piirtänyt ruudutuksen piirustukseensa. Esimerkki ruudutuksesta näkyy ylempänä kuviossa 12, jossa on esitelty piirustuksen viivoja. Sen sijaan B-luokalla muodoilla operointia ilmeni pienennöksiä tai suurennoksia ohella symmetriana suoran suhteen kolmen oppilaan piirustuksessa. Kuvioissa 19 ja 20 on esimerkit piirustuksista, joissa toisessa oppilas on piirtänyt pienennöksen tai suurennoksen ja toisessa oppilas on piirtänyt peilikuvia.



Kuvio 19. Esimerkki piirustuksesta, jossa on pienennös/suurennos (A-luokka, poika)



Kuvio 20. Esimerkki piirustuksesta, jossa on peilikuvia (B-luokka, tyttö)

Lisäksi taulukosta 9 huomataan, että A-luokan piirustuksista löytyi geometrysten ongelmien ja laskemien kuvauksia, jotka kuuluivat muihin geometrisiin asioihin. Molemmat sisällöt olivat saman oppilaan piirustuksessa, josta löytyy jo esimerkiksi kuva ylemmää kuviosta 9. Taulukon 10 pohjalta havaitaan, että B-luokalla kahden oppilaan piirustuksessa ilmeni avaruudellisuutta, joka näissä tapauksissa tarkoitti illuusion kuvaamista. Kaiken kaikkiaan edellä mainittuja aihealueita esiintyi piirustuksissa hyvin vähän ja niiden osuudet suhteessa luokkien kokonaisoppilasmääriin vaihtelivat 4%:n ja 13%:n välillä. Illuusio näkyy edeltävässä esimerkki piirustuksessa eli kuviossa 20.

Molemmilla luokilla oli myös kaksi aihealuetta, jotka eivät esiintyneet kertaakaan oppilaiden piirustuksissa. Luokille yhteinen, piirustuksista puuttuva aihealue oli geometriset kuviot. Tähän aihealueeseen olisi kuulunut monimutkaiset geometriset yhdistelmäkuviot, joista esimerkkeinä Seed of life sekä geometrisista kuviosta koostetut mosaiikit. Yhdistelmäkuvioiden lisäksi A-luokan piirustuksista ei

löytynyt ollenkaan koordinaatteja tai sijaintisuhteita eikä B-luokan piirustuksista muihin geometrisiin asioihin kuuluvia sisältöjä.

6.3 Yhteenveto tuloksista

Käsittelen yhteenveto-osiossa oppilaiden piirustusten lisäksi oppilaiden vastauksia ensimmäisen piirustuksen yhteydessä oleviin kysymyksiin. Täydennän vastauksien avulla tutkielman tuloksia. Tämän lisäksi esittelen molempien luokkien luokanopettajien tekemät piirustukset. Opettajien piirustuksista en kuitenkaan lisää kuvia tutkielmaan, koska tutkielman keskiössä ovat oppilaiden piirustukset. Tämän vuoksi olen hyödyntänyt kaiken mahdollisen tilan oppilaiden piirustuksien esittelyyn.

Tuloksien pohjalta voidaan todeta, että tutkimuksessa mukana olleiden kolmasluokkalaisten oppilaiden käsitys geometriasta painottui geometrisiin muotoihin ja niiden ominaisuuksiin. Luokkien kokonaisrastimäärät muodostuivat suurimmaksi osaksi tämän aihealueen sisällöistä kertyneistä rasteista. A-luokalla 81% rasteista kertyi geometrisista muodoista ja niiden ominaisuuksista, kun B-luokalla vastaava osuus oli vielä suurempi, peräti 90%. Aihealueen sisällä oppilaiden käsitys keskittyi tasokuvioihin ja kappaleisiin. Näistä kahdesta tasokuviot olivat vahvemmin edustettuina oppilaiden piirustuksissa. A-luokalla tasokuvioita esiintyi hieman harvemman oppilaan piirustuksessa, kuin kappaleita. Erilaisista tasokuvioista kertyi kuitenkin huomattavasti enemmän rasteja erilaisiin kappaleisiin nähden. Tästä voidaan päätellä, että kolmiulotteisuus sisältyy oppilaiden käsitykseen geometriasta, mutta kappaleiden tarkempi erittely oli vielä hankalaa.

A-luokan piirustuksista löytyi toiseksi eniten ympäristön geometrisia muotoja ja B-luokan piirustuksista kulmia. B-luokalla mittaamista ilmeni kuitenkin vain tyttöjen piirustuksissa. Piirustuksissa esiintyi eri suuruisia kulmia sekä kulmien nimiä. A-luokkaan nähden B-luokan oppilaiden piirustukset sisälsivät enemmän käsitietoa ja kokonaisuudessaan luokan piirustuksista kertyi selkeästi enemmän rasteja erilaisista geometriaan liittyvistä asioista (A-luokan rastit: 124 ja B-luokan rastit: 187) Tämän voidaan päätellä johtuvan siitä, että B-luokka oli vastikään

opiskellut geometriaa. Sitä, miksi vain B-luokan tyttöjen piirustuksissa esiintyi mitaamista, ei voi perustella tutkielman taustatietojen pohjalta.

Yleisimpien aihealueiden ja sisältöjen lisäksi yksittäiset oppilaat olivat piirtäneet muihin aihealueisiin kuuluvia sisältöjä. Näistä ei kuitenkaan voida sanoa, että ne kuuluisivat yleisesti kolmasluokkalaisten oppilaiden käsitykseen geometriasta. Niiden pohjalta voidaan todeta, että oppilaiden käsitykseen geometriasta saattaa kuulua yleisimpien aihealueiden ja sisältöjen ulkopuolelle jääviä geometrisia asioita, jotka ovat jääneet oppilaan mieleen.

Ensimmäisen piirustuksen yhteydessä oppilaat vastasivat myös kahteen kysymykseen, joista ensimmäinen oli ”Miten geometria näkyy piirustuksessasi?” ja toinen ”Haluatko sanoa vielä jotain muuta geometriasta, mitä piirustuksessasi ei näy?”. Oppilaiden vastaukset jäivät lyhyiksi, koska suurin osa piirustustunnista meni itse piirtämiseen. A-luokalla oppilaiden ensimmäisen kysymyksen vastauksissa korostui geometriset muodot. Osa oli kirjoittanut, että geometria näkyy piirustuksessa kuvioina tai muotoina ja osa oli nimennyt, mitä kaikkia muotoja piirustuksesta löytyy. Esimerkkeinä näistä ympyrä, kuutio sekä viivat. Lisäksi useampi oppilas oli kirjoittanut, että geometria näkyy piirustuksessa kolmiulotteisuutena. Toinen kysymys osoittautui oppilaille hankalaksi ja suurin osa jätti sen tyhjäksi. Joidenkin oppilaiden vastauksissa nousi kuitenkin piirustuksista puuttuvia asioita ilmi. Näistä esimerkkeinä pituudenyksiköt millimetri, senttimetri, metri ja kilometri. Muutama oppilas oli myös lisännyt, että piirustuksessa ei näy ympyrää tai sen piirtäminen ei onnistunut.

B-luokalla oppilaiden vastaukset olivat hyvin samanlaisia kuin A-luokalla. Myös B-luokan oppilaiden ensimmäisen kysymyksen vastauksissa korostui geometriset muodot. Suurimpana erona A-luokan oppilaiden vastauksiin oli B-luokan oppilaiden laajempi geometriatietous, joka näkyi piirustuksien objektien nimeämisessä ensimmäisen kysymyksen yhteydessä. Tästä esimerkkinä kulmat, joista osa oppilaista oli luetellut suoran-, terävän- sekä tylpän kulman vastaukseensa. Myös B-luokalla viimeinen kysymys jäi pääosin tyhjäksi, mutta osa oli ehtinyt vastata myös siihen. Tärkeimpänä havaintona vastauksista nousi pyramidi. Useampi oppilas kertoi, ettei piirustuksessa ole pyramidia, mutta se kuuluu geometriaan.

Luokanopettajien tehtävä oli piirtää piirustus, jonka he kuvittelevat oman luokansa keskiverto-oppilaan piirtävän geometriasta. A-luokan luokanopettaja piirsi kolmioita ja ympyröitä sekä kirjoitti, että kolmasluokkalaisten oppilaan käsitys geometriasta painottuu todennäköisesti tasokuvioihin. Hän kirjoitti myös piirustuksen yhteyteen, että kolmasluokkalaisten oppilaiden voi olla haastavaa hahmottaa geometrian eri osa-alueita tai liittää geometriaa arkielämään. Opettajan piirustus vastasi hyvin tarkasti oppilaiden piirustuksista välittyvää käsitystä geometriasta. Erityisesti tasokuviot nousivat vahvasti esille sekä oppilaiden että opettajan piirustuksissa.

B-luokan luokanopettaja piirsi sekä nimesi piirustukseensa ympyrän, ison neliön, pienen neliön, kolmion sekä kuution. Hän kirjoitti piirustuksen yhteyteen, että kolmasluokkalaisten oppilaan käsitys geometriasta keskittyy todennäköisesti kuvioihin, jotka ovat pääosin säännönmukaisia. Sen sijaan piste, viiva, jana ja kulma saattavat olla monelle melko abstrakteja käsitteitä. B-luokka oli opiskellut geometriaa viimeksi joulukuussa 2018 ja opettaja mainitsi piirustuksessa, että he käyttivät silloin viivoittimia, mikä saattaisi näkyä osan piirustuksessa. A-luokan tavoin, myös B-luokan luokanopettajan piirustus vastasi hyvin tarkasti oppilaiden käsitystä geometriasta.

Kaiken kaikkiaan oppilaiden piirustuksien, vastauksien sekä opettajien piirustuksien pohjalta voidaan todeta, että tutkielmassa mukana olleiden kolmasluokkalaisten oppilaiden käsitys geometriasta keskittyi geometrisiin muotoihin molemmilla luokilla. Geometristen muotojen lisäksi oppilaiden piirustuksissa oli vaihtelevasti muita geometrian sisältöjä. Näiden pohjalta voidaan todeta, että oppilaiden käsitykset geometriasta ovat samankaltaisia, mutta eivät identtisiä.

7 Oppilaiden käsitykset geometrian opetuksesta

Tässä luvussa esittelen oppilaiden käsityksiä geometrian opetuksesta. Hyödynnän tulosten esittelyssä analysointivälineen rakennetta. Tuloksien yhteenveto-osioon lisään myös luokanopettajien tekemien piirustuksien tulokset sekä käsitelen niitä rinnakkain oppilaiden piirustuksista saatujen tuloksien kanssa.

7.1 Oppilaiden käsityksien tarkastelu

Luokilla oli erilainen tausta geometrian opetuksessa. A-luokalla geometrian opiskelusta oli huomattavasti enemmän aikaa verrattuna B-luokkaan. Tarkastelen tuloksia luokkakohtaisesti sekä luokkia keskenään vertaillen. Myös tässä luvussa luokkien tulokset ovat koottu peräkkäisiin taulukoihin ensimmäisen tulosluvun tavoin. Taulukoiden alapuolella olevissa tuloksien käsittelyosioissa luokat ovat rinnakkain vertailun selkeyttämiseksi. Yhteenveto-osioon on koottu tärkeimmät tulokset oppilaiden käsityksistä geometrian opetusta kohtaan.

Taulukoissa tulokset ovat ilmoitettu lukuina sekä prosentteina. Prosentit mahdollistavat luokkien vertailun eri suuruisista oppilasmääristä huolimatta. Prosentit kertovat, mikä osa luokan oppilasmäärästä, tytöistä tai pojista oli kuvannut geometrian opetusta tarkasteltavalla tavalla. Kaikissa taulukoissa prosentit ovat pyöristetty lähimpään kokonaislukuun. Luvut puolestaan kuvastavat oppilasmääriä, joiden pohjalta prosentit ovat laskettu. Oppilasmäärät kertovat, kuinka moni oppilas, tyttö tai poika kuvaili geometrian tuntia tarkasteltavalla tavalla. Luokalla A oppilaita oli 23, joista 13 oli tyttöjä ja 10 poikia. Luokalla B oppilaita oli 24, joista 12 oli tyttöjä ja 12 poikia.

7.2 Oppilaiden käsitykset kolmessa ulottuvuudessa

Tässä luvussa analysointivälineen ulottuvuudet toimivat väliotsikoina, joiden alta löytyvät kyseisen ulottuvuuden tulokset (liitteet 5 ja 6). Havainnollistan tuloksia taulukoilla, jotka ovat nimetty ulottuuteen kuuluvien aihealueiden mukaan. Taulukoissa tulokset ovat esitetty analysointivälineen mukaisessa järjestyksessä.

7.2.1 Suhteet

Ensimmäinen ulottuvuus eli suhteet koostuvat kolmesta aihealueesta, jotka ovat opettajan ja oppilaan sanallinen ja ei-sanallinen viestintä sekä menetelmä. Tuloksien esittely on jaettu alaotsikoihin edellä mainittujen aihealueiden alle. Kahteen ensimmäiseen taulukkoon 11 ja 12 on koottu tulokset opettajan sanallisesta ja ei-sanallisesta viestinnästä luokilla A ja B.

Opettajan sanallinen ja ei sanallinen viestintä

Taulukko 11. Opettajan sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla A

Opettaja		Oppilaat		Työt		Pojat	
		A	%	A	%	A	%
Sijainti luokassa	Taulun edessä	12	52	7	54	5	50
	Oppilaiden joukossa	1	4	0	0	1	10
	Pöydän luona	5	22	3	23	2	20
	Mualla luokassa	1	4	0	0	1	10
	Ei opettajaa	5	22	3	23	2	20
Opettajan tuki	Kysymykset	1	4	0	0	1	10
	Pyyntö	2	9	2	15	0	0
	Tarkkailee	1	4	0	0	1	10
	Ei tukea	19	83	11	85	8	80

Taulukko 12. Opettajan sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla B

Opettaja		Oppilaat		Tytöt		Pojat	
		B	%	B	%	B	%
Sijainti luokassa	Taulun edessä	13	54	8	67	5	42
	Pöydän luona	3	13	1	8	2	17
	Mualla luokassa	3	13	3	25	0	0
	Ei opettajaa	6	25	1	8	5	42
Opettajan tuki	Auttaa	1	4	1	8	0	0
	Positiivinen palaute	2	8	2	17	0	0
	Kysymys	2	8	2	17	0	0
	Pyyntö	1	4	0	0	1	8
	Tarkkailee	1	4	1	8	0	0
	Ei tukea	19	79	8	67	11	92

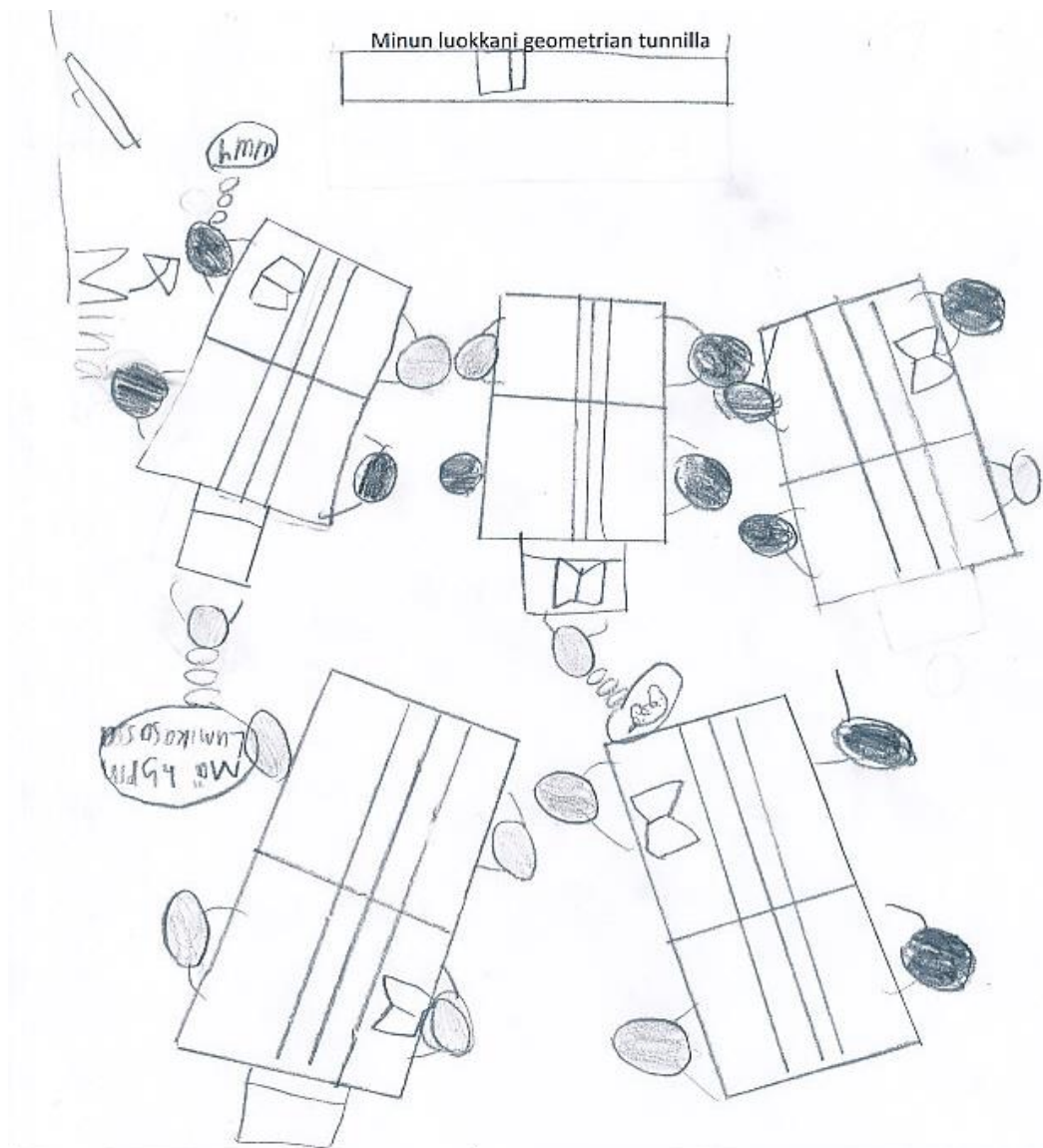
Opettajan sijainti luokassa

Taulukoista 11 ja 12 huomataan, että noin puolet oppilaista piirsi opettajan taulun eteen molemmilla luokilla (A-luokka: 52% ja B-luokka 54%). A-luokalla tyttöjen ja poikien välillä ei ollut juurikaan eroja, mutta B-luokalla tyttöjen osuus oli suurempi poikiin nähden. Taulun edusta oli siis opettajan yleisin paikka molempien luokkien piirustuksissa. Kuviossa 21 on esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja seisoo taulun luona.



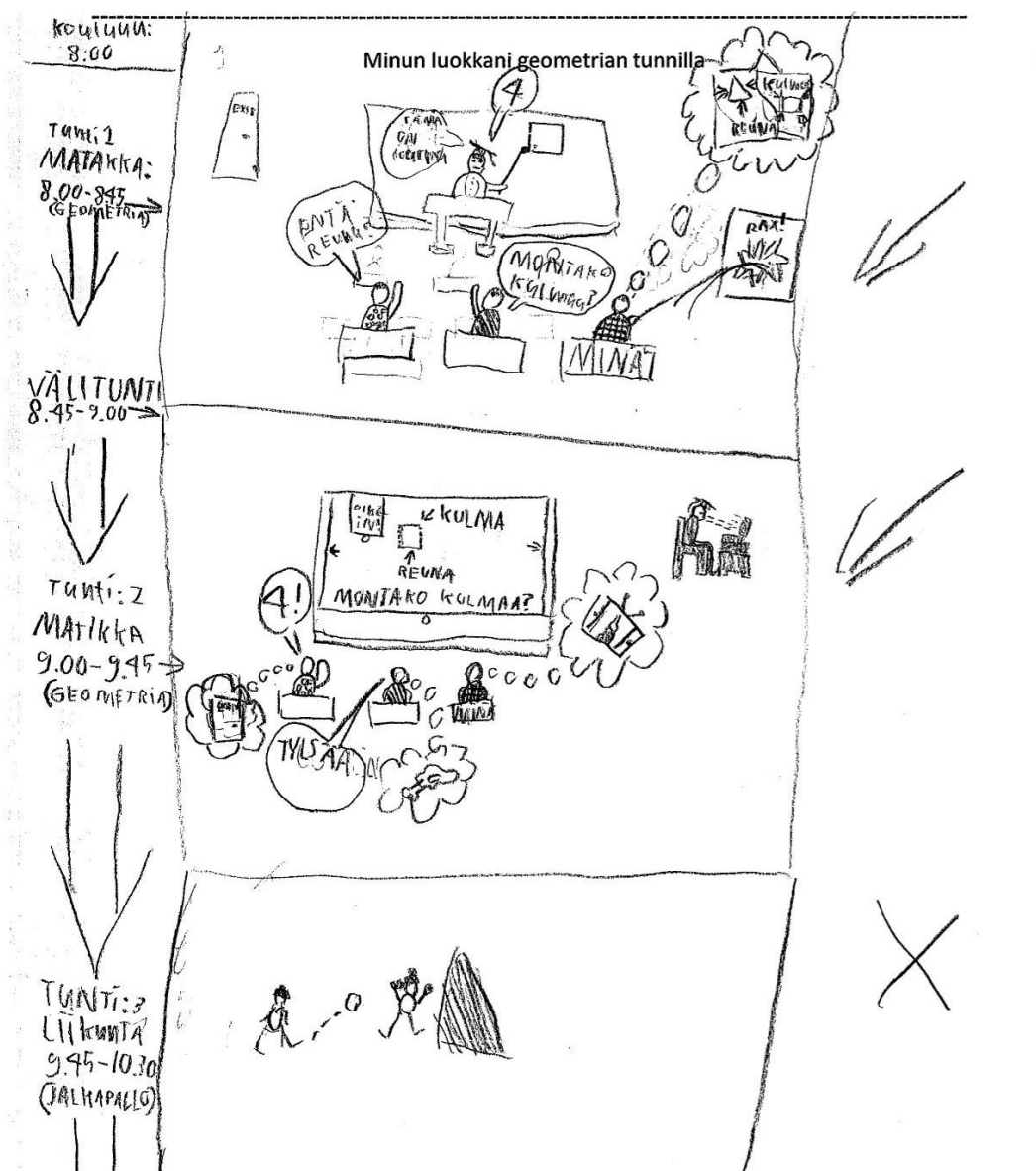
Kuvio 21. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja on taululla (A-luokka, tyttö)

Tämän lisäksi taulukon 11 pohjalta havaitaan, että A-luokalla opettaja oli pöydän luona viidessä piirustuksessa ja viidessä piirustuksessa opettajaa ei ollut ollenkaan. Samasta oppilasmäärästä johtuen näiden molempien osuudet suhteessa luokan kokonaisoppilasmäärään olivat 22% eikä sukupuolten välillä ollut juurikaan eroja. Vastaavasti taulukosta 12 huomataan, että B-luokalla opettaja oli pöydän luona kolmessa piirustuksessa (13%) ja kuudessa piirustuksessa opettajaa ei ollut ollenkaan (25%). Toisin kuin A-luokalla, B-luokalla opettajan puuttuminen oli selkeästi yleisempää poikien piirustuksissa. Tyttöjen piirustuksissa opettaja puuttui vain yhdestä (8%), mutta poikien piirustuksissa viidestä (42%). Kuviossa 22 on esimerkki piirustuksesta, jossa ei ole ollenkaan opettajaa luokassa.



Kuvio 22. Esimerkki piirustuksesta, jossa ei ole ollenkaan opettajaa (B-luokka, poika)

Lisäksi A-luokan yksittäisissä piirustuksissa opettaja oli oppilaiden joukossa tai jossain muualla luokassa. Jälkimmäisessä tapauksessa opettaja oli tietokoneen ääressä luokan seinustalla. Oppilas oli piirtänyt sarjakuvamaisen piirustuksen, jossa ensimmäisessä ruudussa opettaja oli pöydän luona ja seuraavassa tietokoneella käyttämässä geometria aiheisia e-materiaaleja opetuksen tukena. Tästä piirustuksesta esimerkki alla olevassa kuviossa 23. B-luokalla opettaja oli piirretty jonnekin muualle luokkaan kolmessa piirustuksessa. Näistä kahdessa piirustuksessa opettaja seisoι luokan edessä, mutta ei taulun luona.



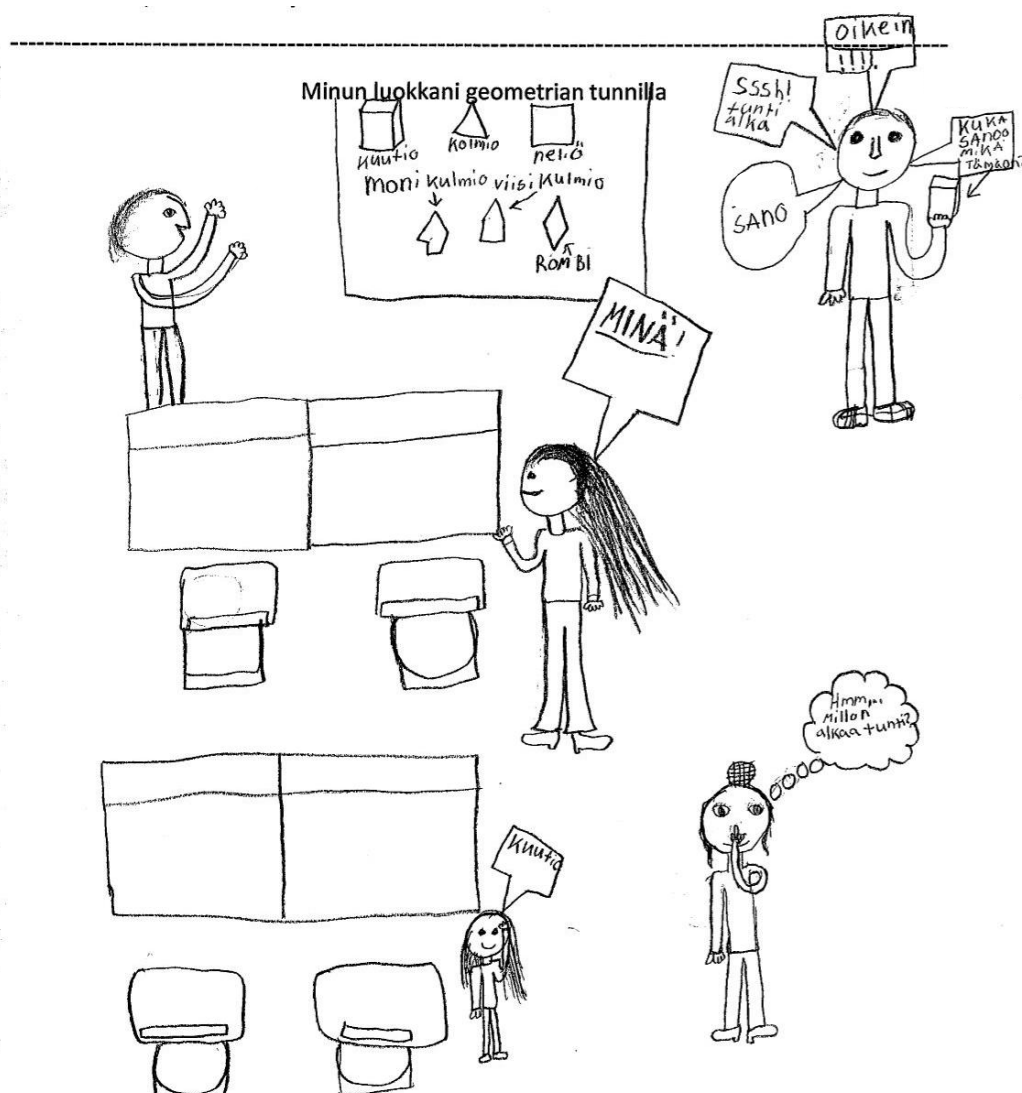
Kuvio 23. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja on pöydän luona sekä tietokoneen ääressä (A-luokka, poika)

Opettajan oppilaille välittämä tuki

Taulukoiden 11 ja 12 pohjalta nähdään myös, että A-luokan piirustuksissa 83%:ssa ei ilmennyt opettajan tukea, kun B-luokalla vastaava osuus oli 79%. A-luokalla yhteensä neljässä piirustuksessa esiintyi opettajan tukea jossain muodossa. Näissä piirustuksissa opettaja esitti matemaattisen kysymyksen, pyynnön tai tarkkaili oppilaiden toimintaa oppilaiden joukossa. Matemaattinen kysymys liittyi kuvioden kulmien määrään, pyynnöt oppilaiden tekemien geometristen piirustuksien palauttamiseen sekä kuvioden piirtämiseen. Molemmat pyynnöt esiintyivät tyttöjen piirustuksissa ja kysymys sekä tarkkaileva opettaja poikien piirustuksissa. Muita merkittäviä eroja sukupuolten välillä ei ilmennyt. B-luokalla opettajan tukea ilmeni lähinnä tyttöjen piirustuksissa. Tyttöjen kohdalla tukea ilmeni kuudessa piirustuksessa auttamisena, positiivisena palautteena, matemaattisena kysymyksenä, matemaattisena pyyntönä sekä tarkkailuna. Pojilla tukea ilmeni vain yhdessä piirustuksessa matemaattisena pyyntönä. Kuvioissa 24 ja 25 esimerkit piirustuksista, joissa ilmenee matemaattinen pyyntö tai kysymys.



Kuvio 24. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja esittää oppilaille matemaattisen pyynnön (A-luokka, tyttö)



Kuvio 25. Esimerkki piirustuksesta, jossa opettaja esittää oppilaille matemaattisen kysymyksen (B-luokka, tyttö)

Kaiken kaikkiaan luokkien välillä suurin ero oli sukupuolien jakautumisessa. A-luokalla tyttöjen ja poikien tulokset olivat tasaisia eikä mainittavia eroavaisuuksia esiintynyt. Sen sijaan B-luokalla sukupuolten välisissä tuloksissa oli vaihtelua jokaisessa kohdassa. Opettajan sijainnissa suurimmat erot olivat opettajan puuttumisessa sekä sijoittumisessa taulun eteen. A-luokalla yhdessä piirustuksessa opettaja seisoi oppilaiden joukossa, mitä B-luokan piirustuksissa ei esiintynyt olleenkaan. B-luokalla opettajan välittämässä tuessa oli merkittäviä eroja tyttöjen ja poikien välillä, mutta A-luokalla erot jäivät myös tuen suhteen vähäisiksi.

Oppilaiden sanallinen ja ei-sanallinen viestintä

Taulukko 13. Oppilaiden sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla A

Oppilas		Oppilaat		Työt		Pojat	
		A	%	A	%	A	%
Sijainti luokassa	Muutama oppilas kuvassa	6	26	2	15	4	40
	Istuvat pulpettien ääressä	21	91	11	85	10	100
	Muualla	1	4	0	0	1	10
	Tunnistamaton sijainti	2	9	2	15	0	0
Osallistuminen	Tehtäviä pulpettien äärellä	8	35	5	38	3	30
	Kuuntelevat	11	48	8	62	3	30
	Vastaus	1	4	0	0	1	10
	Kysymys	2	9	1	8	1	10
	Yhdessä taululla ratkaisua	1	4	0	0	1	10
	Osallistuvat keskusteluun	4	17	3	23	1	10
	Positiivinen kommentti	5	22	3	23	2	20
	Negatiivinen kommentti	5	22	2	15	3	30
	Ei mat. keskustelu/ajattelu	10	43	2	15	8	80
	Passiivisia	1	4	1	8	0	0
Oppilaiden välinen kommunikointi	Itsenäinen työskentely	10	43	7	54	3	30
	Yhdessä työskentely	1	4	0	0	1	10
	Tunnistamaton / ei ole	12	52	6	46	6	60

Taulukko 14. Oppilaiden sanallinen ja ei-sanallinen viestintä luokalla B

Oppilas		Oppilaat		Työt		Pojat	
		B	%	B	%	B	%
Sijainti luokassa	Muutama oppilas kuvassa	4	17	3	25	1	8
	Istuvat pulpettien ääressä	18	75	9	75	9	75
	Seisovat opettajan vieressä	3	13	2	17	1	8
	Seisovat taulun edessä	1	4	0	0	1	8
	Muiden joukossa	1	4	0	0	1	8
	Muualla	5	21	3	25	2	17
	Ei oppilaita	4	17	2	17	2	17
Osallistuminen	Tehtäviä pulpettien äärellä	9	38	3	25	6	50
	Kuuntelevat	2	8	2	17	0	0
	Vastaus	3	13	2	17	1	8
	Kysymys	1	4	1	8	0	0
	Yhdessä taululla ratkaisua	1	4	1	8	0	0
	Osallistuvat keskusteluun	7	29	5	42	2	17
	Positiivinen kommentti	2	8	1	8	1	8
	Negatiivinen kommentti	1	4	1	8	0	0
	Ei mat. keskustelu/ajattelu	10	42	5	42	5	42
	Passiivisia	1	4	0	0	1	8
	Ei tunnistettavissa	3	13	1	8	2	17
Oppilaiden välinen kommunikointi	Itsenäinen työskentely	4	17	2	17	2	17
	Negatiivinen kommentti	4	17	1	8	3	25
	Tunnistamaton / ei ole	17	71	9	75	8	67

Oppilaiden sijainti luokassa

Taulukosta 13 havaitaan, että 91%:ssa eli melkein kaikissa A-luokan piirustuksissa oppilaat istuivat pulpettien ääressä. Poikien keskuudessa osuus oli 100% ja tyttöjen keskuudessa 85%. Taulukosta 14 puolestaan nähdään, että B-luokalla vastaava osuus oli 75% sekä tytöillä että pojilla. Pulpetit olivat siis oppilaiden yleisin paikka molempien luokkien piirustuksissa. Tämän lisäksi yksittäisiä oppilaita oli muissa paikoissa, jotka ovat eritelty alapuolelle luokakohtaisesti. Kuviossa 26 on esimerkki piirustuksesta, jossa oppilaat istuvat pulpettien ääressä.



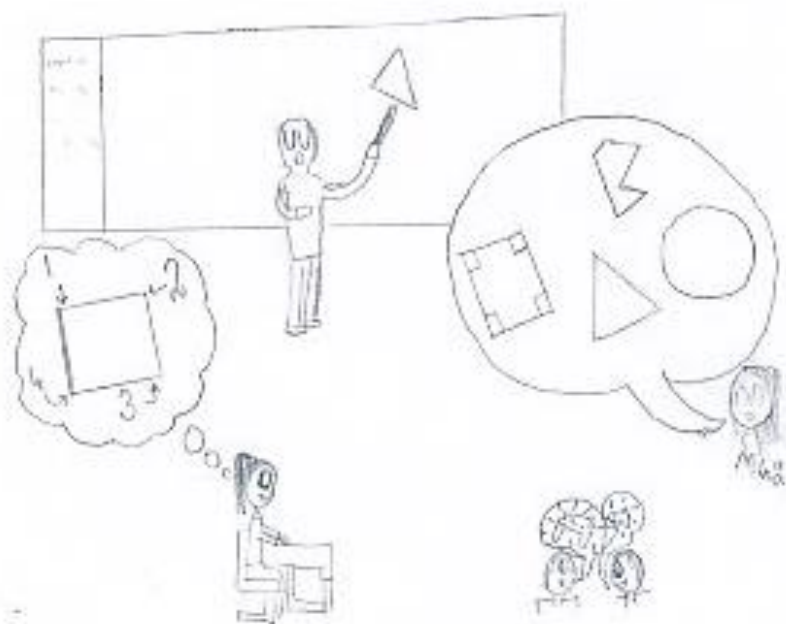
Kuvio 26. Esimerkki piirustuksesta, jossa oppilaat istuvat pulpettien ääressä (A-luokka, poika)

Taulukon 13 pohjalta huomataan myös, että A-luokalla kuudessa (26%) piirustuksessa oli vain muutama oppilas, jolloin luokan muiden oppilaiden sijainnista ei ollut tietoa. Tällöin kuvasta määriteltiin vain piirrettyjen oppilaiden sijainnit. Kahdessa tyttöjen piirustuksessa oppilaiden sijainnit jäivät kokonaan tunnistamattomiksi, koska piirustuksista löytyi vähän tai ei ollenkaan huonekaluja, joiden pohjalta oppilaiden sijainnit olisi voinut määrittellä. Yhdessä piirustuksessa oppilas oli luokan perällä kirjahyllyn luona, jolloin sijainniksi merkittiin muualla luokassa. Kuviossa 27 on esimerkki piirustuksesta, jossa on vain kaksi oppilasta eikä muiden oppilaiden sijaintia voinut määrittellä.



Kuvio 27. Esimerkki piirustuksesta, jossa on vain muutama oppilas (A-luokka, tyttö)

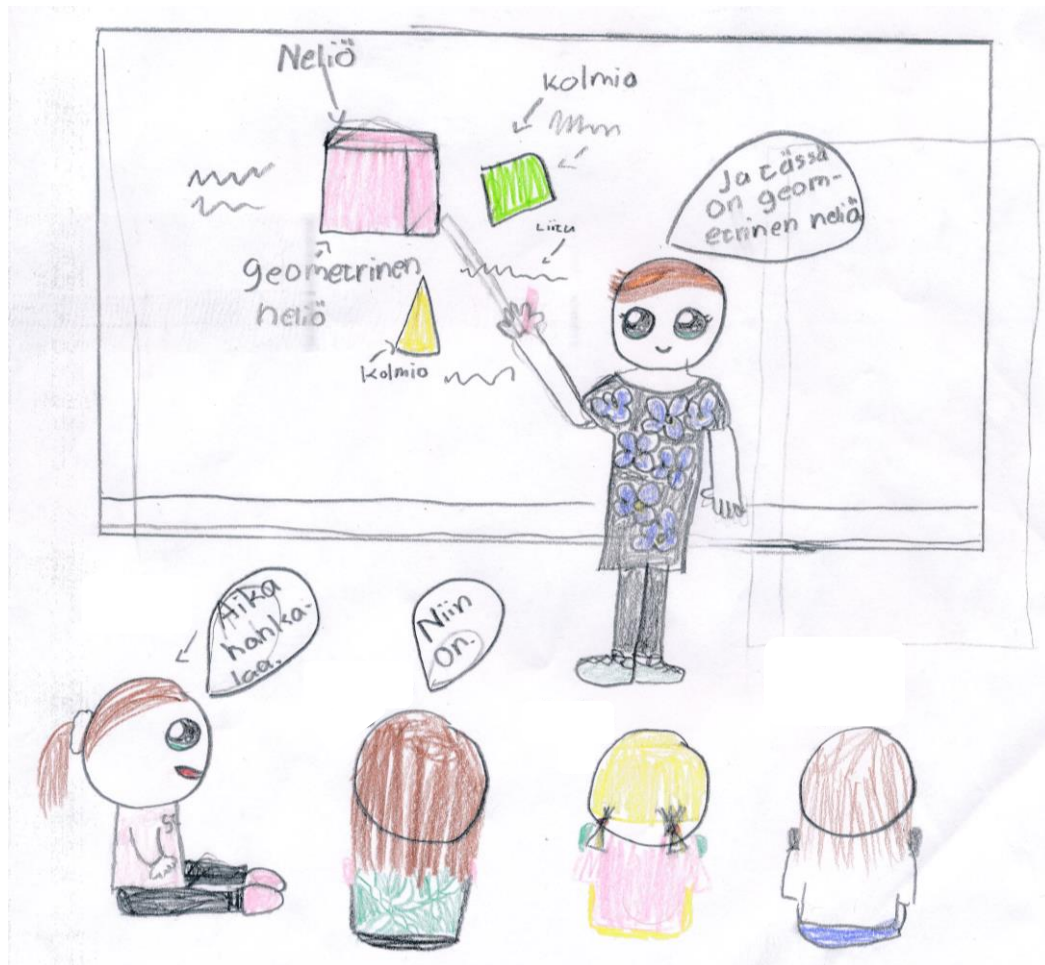
Taulukosta 14 huomataan, että B-luokan piirustuksissa oppilaita seisoivat myös taulun edessä tai opettajan vierellä. Näiden lisäksi muualla luokassa olevia oppilaita esiintyi viidessä (21%) piirustuksessa. Tästä esimerkkinä piirustus alla olevassa kuviossa 28, johon oli piirretty neljä oppilasta seisomaan tai istumaan ympäri luokkaa. Yhdessä piirustuksessa oppilas oli piirtänyt kuvaan myös naapuriluokan sekä toisen luokan oppilaita. Piirustuksesta oli mahdoton tulkita varmaksi oppilaiden sijainteja, mutta selkeästi oppilaita oli piirretty sekaisin, minkä vuoksi oppilaiden sijainniksi määriteltiin muiden joukossa.



Kuvio 28. Esimerkki piirustuksesta, jossa oli neljä oppilasta ympäri luokkaa (B-luokka, tyttö)

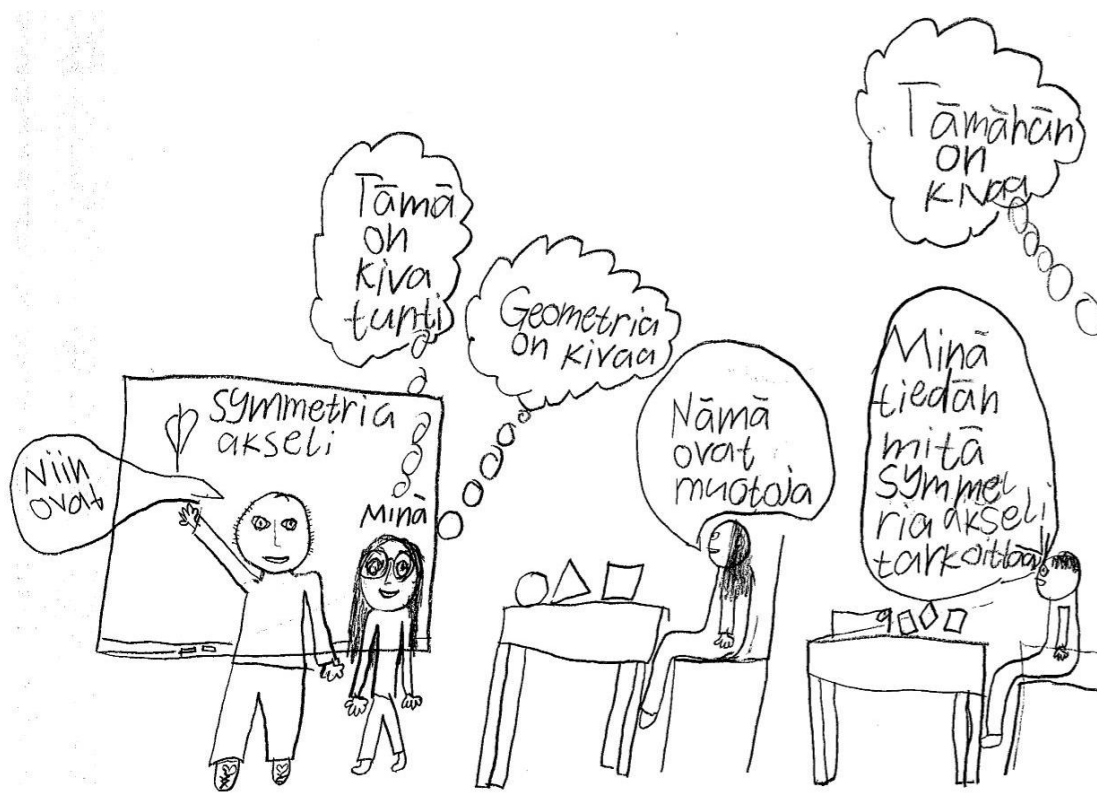
Oppilaiden osallistuminen

Taulukosta 13 huomataan, että A-luokalla oppilaiden sanallisen ja ei-sanallisen viestinnän sisällä suurimmat erot olivat oppilaiden osallistumisessa. Tyttöjen piirustuksissa oppilaat olivat kuvattu aktiivisempina kuin poikien. Tyttöillä sekä pojilla oppilaiden aktiivisuus oli keskittynyt tehtävien tekoon ja kuuntelemiseen, mutta tyttöillä luvut olivat suurempia. 80%ssa poikien piirustuksista ei ilmennyt minkäänlaista matemaattista ajattelua tai keskustelua, kun tyttöillä vastaava osuus oli vain 15%. Sekä tyttöjen että poikien piirustuksissa ilmeni positiivisia ja negatiivisia kommentteja. Osa oppilaiden välisenä kommunikointina ja osa oppilaan mielipiteen ilmaisuna joko ajatus- tai puhekuplina. Esimerkkeinä positiivisista kommentteista ”geometria on kivaa”, ”jee” ja ”helppoa”. Negatiivisista kommentteista esimerkkinä kahden oppilaan välinen vuoropuhelu kuviossa 29, jossa toinen toteaa, että geometria on hankalaa ja toinen myötäilee vastausta sanoen ”niin on”.



Kuvio 29. Esimerkki piirustuksesta, jossa on negatiivinen kommentti (A-luokka, tyttö)

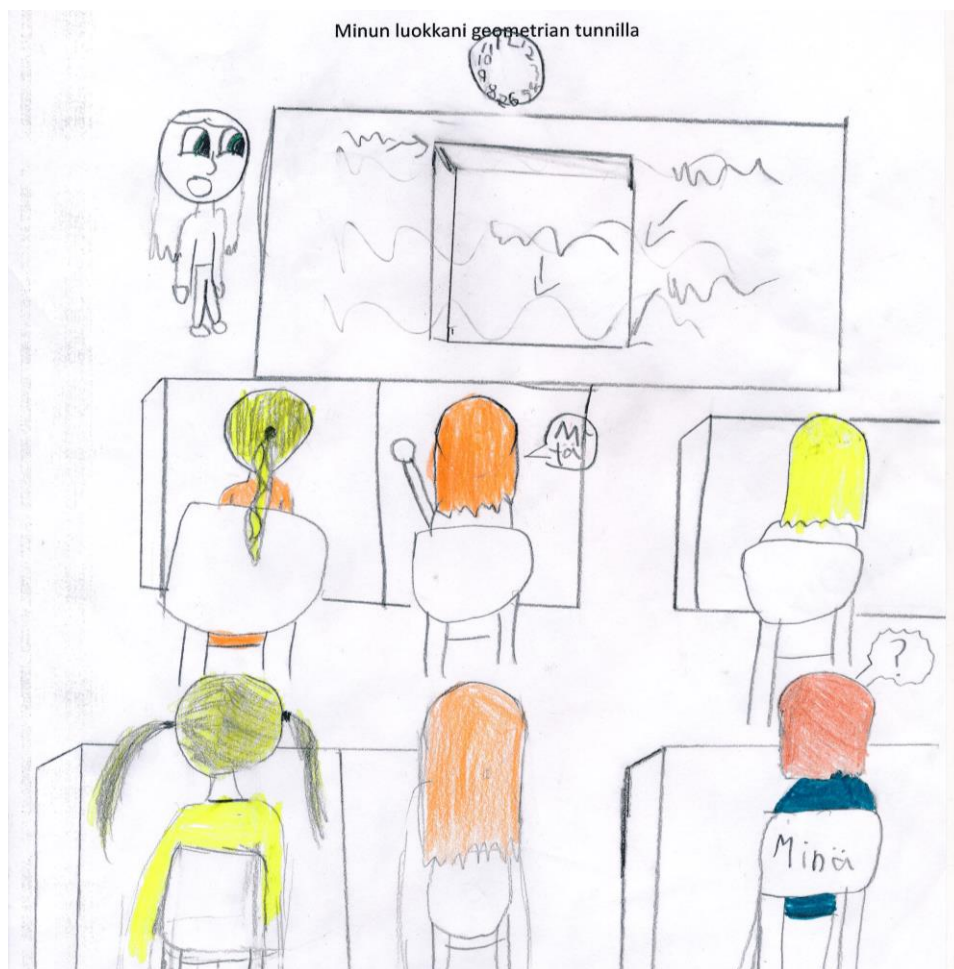
Taulukon 14 pohjalta nähdään, että B-luokalla poikien piirustuksissa oppilaiden yleisin osallistumisen muoto oli tehtävien teko pulpettien äärellä. Sen sijaan tyttöjen piirustuksissa yleisin oli luokassa käytävään keskusteluun osallistuminen, mikä selvisi puhekuplista. Keskusteluun osallistuminen tapahtui viittaamalla ja opettajan kysymyksiin vastaamalla. A-luokan tavoin, myös B-luokalla tytöt olivat kuvanneet oppilaiden osallistumista huomattavasti enemmän, kun taas poikien kohdalla osallistumista löytyi vain yksittäisistä piirustuksista tehtävien teon ohella. Osallistumista esiintyi aikaisemmin mainittujen lisäksi auttamisena, kysymyksinä, vastauksina, kuuntelemisena, tehtävien ratkaisemisena taululla sekä positiivisina ja negatiivisina kommentteina. Kuviossa 30 on esimerkki piirustuksesta, jossa on positiivisia kommentteja.



Kuvio 30. Esimerkki piirustuksesta, jossa on positiivisia kommentteja (B-luokka, tyttö)

Oppilaiden välinen kommunikointi

Taulukon 13 pohjalta voidaan todeta, että A-luokalla oppilaiden välinen kommunikointi oli jakautunut puoliksi itsenäisen työskentelyn (43%) ja tunnistamattoman (52%) välillä. Painopiste oli kuitenkin tunnistamattomaksi jääneessä kommunikoinnissa. Itsenäinen työskentely ilmeni piirustuksissa toimintana, johon ei sisällynyt vuorovaikutusta muiden oppilaiden kanssa. Tunnistamattomaksi jäivät esimerkiksi ne piirustukset, joissa oppilaat olivat piirretty selkäpuolelta katsottuna, eikä kuvasta välittynyt oppilaiden sen hetkinen toiminta. Yhdessä työskentelyä esiintyi vain yhden pojan piirustuksessa. Kuvassa oppilaat sekä opettaja pohtivat yhdessä toisiltaan kysyen ja toisilleen vastaten neliön ominaisuuksia. Kuviossa 31 on esimerkki piirustuksesta, jossa oppilaiden työskentely on itsenäistä eivätkä oppilaat ole vuorovaikutuksessa keskenään.



Kuvio 31. Esimerkki piirustuksesta, jossa oppilaat työskentelevät itsenäisesti (A-luokka, tyttö)

Taulukon 14 tuloksista nähdään, että B-luokalla oppilaiden välistä kommunikointia ei ilmennyt tai se ei ollut tunnistettavissa noin 70%:ssa piirustuksista sekä tyttöjen että poikien kohdalla. Neljässä piirustuksessa oppilaat työskentelivät itsenäisesti, joten niissäkään vuorovaikutusta ei esiintynyt. Sen sijaan neljässä piirustuksessa oppilaat olivat vuorovaikutuksessa keskenään sanomalla toiselle oppilaalle jonkin negatiivisen kommentin. Näistä esimerkkeinä "pois tieltä", "suu kii", "oo hiljaa" sekä "et saa", kun toinen oppilas pyytää kynää lainaksi. "Suu kii" ilmenee piirustuksessa, jossa yksi oppilas aivastaa ja yksi huutaa opettajaa nimeltä. "Oo hiljaa" esiintyy piirustuksessa, jossa vieressä istuva sanoo "kato mä viittaan". Myöhemmin nämä ovat tulkittu myös oppilasjohtoiseksi järjestyksen ja käytöksen ylläpitämiseksi. Kuvioissa 32 ja 33 on esimerkit piirustuksista, joissa oppilaiden välinen vuorovaikutus on negatiivista.

Menetelmä

Taulukko 15. Menetelmä luokalla A

Menetelmä	Oppilaat		Työt		Pojat	
	A	%	A	%	A	%
Opettajajohtoinen	3	13	2	15	1	10
Itsenäinen työskentely	6	26	4	31	2	20
Yhdessä työskentely	1	4	0	0	1	10
Tunnistamaton/ei näy	13	57	7	54	6	60

Taulukko 16. Menetelmä luokalla B

Menetelmä	Oppilaat		Työt		Pojat	
	A	%	A	%	A	%
Itsenäinen työskentely	3	13	2	17	1	8
Tunnistamaton/ei näy	21	88	10	83	11	92

Taulukosta 15 nähdään, että A-luokalla menetelmä ei ilmennyt 57%:ssa oppilaiden piirustuksista ja lopuissa menetelmä oli joko opettajajohtoista, itsenäistä työskentelyä tai yhdessä työskentelyä. Näistä itsenäinen työskentely oli yleisin ja sitä löytyi kuuden oppilaan piirustuksesta (26%). Ero B-luokkaan oli merkittävä, koska taulukosta 16 huomataan, että B-luokalla menetelmä ilmeni vain 13%:ssa piirustuksista. Näissä kaikissa menetelmä oli itsenäistä työskentelyä. Kun A-luokalla 13 oppilasta ei tuonut piirustuksessaan menetelmää esille, niin B-luokalla vastaava määrä oli 21 oppilasta, mikä on 88% luokan kokonaisoppilasmäärästä. Kummallakaan luokalla sukupuolten välillä ei ollut merkittäviä eroja minkään menetelmän kohdalla.

7.2.2 Tavoite

Toinen ulottuvuus eli tavoite rakentui oppitunnin sisällöstä sekä piirustuksissa näkyvästä opetusmateriaalista. Tavoitetta koskevat tulokset ovat koottu alla oleviin taulukoihin 17 ja 18.

Taulukko 17. Oppitunnin sisältö sekä käytössä oleva opetusmateriaali luokalla A

Oppitunti		Oppilaat		Työt		Pojat	
		A	%	A	%	A	%
Tunnin sisältö	Tunnin sisältö taululla	15	65	8	62	7	70
	Sisältö ei näkyvissä	7	30	4	31	3	30
	Sisältö välittyy opettajasta	9	39	5	38	4	40
	Sisältö = työskentely	3	13	2	15	1	10
Opetusmateriaali	2D-muodot taululla/vihossa	9	39	6	46	3	30
	3D-muodot taululla/vihossa	11	48	6	46	5	50
	2D-mallit muualla	3	13	1	8	2	20
	3D-kappale muualla	1	4	0	0	1	10
	Oppilailla geometrinen väline	2	9	1	8	1	10
	Ei geometrisia välineitä	21	91	12	92	9	90

Taulukko 18. Oppitunnin sisältö sekä käytössä oleva opetusmateriaali luokalla B

Oppitunti		Oppilaat		Työt		Pojat	
		B	%	B	%	B	%
Tunnin sisältö	Tunnin sisältö taululla	12	50	8	67	4	33
	Sisältö ei näkyvissä	12	50	4	33	8	67
	Sisältö välittyy opettajasta	7	29	4	33	3	25
	Sisältö = työskentely	1	4	1	8	0	0
Opetusmateriaali	2D-muodot taululla/vihossa	15	63	10	83	5	42
	3D-muodot taululla/vihossa	2	8	2	17	0	0
	2D-mallit muualla	2	8	0	0	2	17
	3D-kappale muualla	2	8	2	17	0	0
	Opettajalla geometrinen väline	1	4	1	8	0	0
	Oppilailla geometrinen väline	2	8	2	17	0	0
	Ei geometrisia välineitä	20	83	9	75	11	92

Oppitunnin sisältö

Taulukoista 17 ja 18 huomataan, että A-luokan oppilaiden piirustuksissa oppitunnin sisältö näkyi taululla useammin, kuin B-luokan oppilaiden. Myös sukupuolten välisissä tuloksissa oli vaihtelua luokkien kesken. A-luokan oppilaista 65% oli piirtänyt tunnin sisällön taululle näkyviin eikä tyttöjen ja poikien välillä ollut suurta eroa. B-luokalla vastaava osuus oli 50% ja tyttöjen piirustuksissa sisältö näkyi taululla selkeästi useammin poikien piirustuksiin nähden. Lisäksi piirustuksista tutkittiin, kuinka monen oppilaan piirustuksessa oppitunnin sisältö välittyi opettajasta. Myös tässä A-luokan tulos oli korkeampi. A-luokalla sisältö välittyi opettajasta yhdeksän oppilaan piirustuksessa, mikä on 39% koko luokan oppilasmäärästä. B-luokalla vastaava osuus oli 29% eli sisältö välittyi opettajasta seitsemän oppilaan piirustuksessa. Tässä sukupuolten välillä ei ollut merkittäviä eroja kummallakaan luokalla. Tuloksissa on päällekkäisyyttä ja osassa sisältö saattoi välittyä sekä taululta että opettajasta, mutta näitä tuloksissa ei ole eritelty erikseen.

Taulukoista 17 ja 18 nähdään myös, että osassa piirustuksissa oppitunnin sisältö ei näkynyt ollenkaan. A-luokalla sisältö ei ollut näkyvissä seitsemän (30%) oppilaan piirustuksessa ja B-luokalla kahdentoista (50%) oppilaan piirustuksessa. Lisäksi yksittäisten oppilaiden piirustuksissa oppitunnin sisältö oli linjassa oppilaiden työskentelyn kanssa. Näissä piirustuksissa taululla oleva tai opettajasta välittyvä sisältö vastasi oppilaiden toimintaa. A-luokalla kolme oppilasta ja B-luokalla yksi oppilas oli piirtänyt sisällön vastaamaan oppilaiden toimintaa. B-luokalaisen oppilaan piirustuksessa taululle oli piirretty kuvioita, joiden pohjalta opettaja esittää kysymyksiä. Oppilaat pyytävät viittaamalla puheenvuoroa ja vastaavat kysymyksiin, kun opettaja mainitsee nimeltä. Kuviossa 34 on esimerkki piirustuksesta, jossa oppitunnin sisältö on näkyvissä taululla, sekä oppilaiden toiminta vastaa sisältöä. Oppilaat työskentelevät tietokoneilla ja ainakin yhden oppilaan tietokoneen näytöllä on kuution kuva, joka löytyy myös luokan taululta.

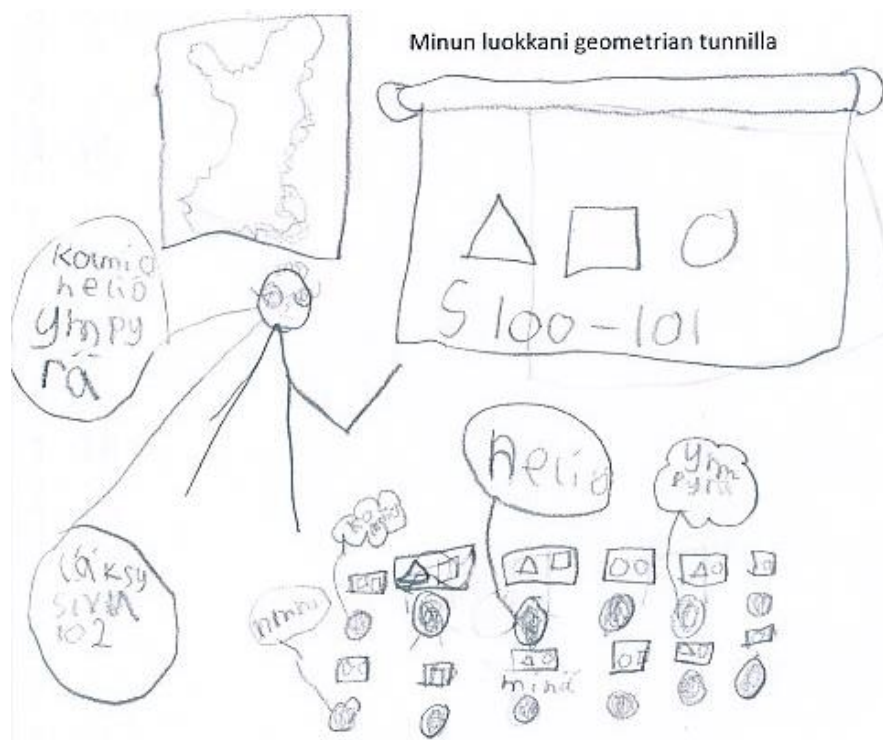


Kuvio 34. Esimerkki piirustuksesta, jossa oppitunnin sisältö näkyy taululla ja oppilaiden tekeminen vastaa sisältöä (A-luokka, poika)

Opetusmateriaali

Opetusmateriaali- osioon kuuluivat kaikki oppilaiden vihoissa, taululla tai muualla luokassa näkyvät kaksi- ja kolmiulotteiset muodot sekä geometrian opetuksessa käytettävät välineet. Taulukosta 17 huomataan, että A-luokalla yhdeksän (39%) oppilaan piirustuksessa oli tasokuvioita ja yhdentoista (48%) oppilaan piirustuksessa kappaleita taululla tai oppilaiden vihoissa. Muutama oppilas oli piirtänyt tasokuvioita tai kappaleita myös muualle luokkaan. Näistä esimerkkeinä opettajan pöydällä olevat geometriaa sisältävät piirustukset ja oppilaiden pulpeteilla olevat kannettavat tietokoneet, joilla oppilaat tekivät geometrian tehtäviä. A-luokalla tytöt olivat piirtäneet enemmän geometrisia muotoja vihkoihin tai taululle, kun poikien piirustuksissa geometrisia muotoja esiintyi enemmän muualla luokassa. Geometrisia välineitä oppilaiden piirustuksissa ei esiintynyt juuri ollenkaan. Ainoat välineet olivat kahden oppilaan piirustuksissa olevat viivoittimet.

Taulukosta 18 huomataan, että B-luokan piirustuksista löytyi eniten kaksiulotteisia kuvioita taululta tai oppilaiden vihoista. Tasokuvioita löytyi yhteensä viiden-toista oppilaan piirustuksesta, mikä on 63% koko luokan oppilasmäärästä. Tyttöjen osuus piirustuksista oli puolet suurempi kuin poikien. Tasokuvioiden lisäksi tyttöjen piirustuksista löytyi kappaleita taululta tai oppilaiden vihoista sekä muualta luokasta. Näiden lisäksi tyttöjen piirustuksissa esiintyi geometrisia välineitä niin opettajalla kuin oppilailla. Geometrisia välineitä ei kuitenkaan esiintynyt kuin yksittäisten tyttöjen piirustuksissa. Näistä yhdessä opettajalla oli kuution muotoinen palikka kädessä, yhdessä pulpetilla oli viivoitin ja yhdessä oppilailla oli eri muotoisia geometrisia kappaleita pöydillä. Kappaleet näyttivät tasokuvioilta, mutta tulkituin ne kappaleiksi, koska oppilas oli piirtänyt ne pysymään pystyssä pöydillä. Poikien piirustuksissa opetusmateriaalin näkyminen oli vähäisempää, mutta kahdessa piirustuksessa oli kuitenkin tasokuvioita muualla luokassa. Näissä kahdessa piirustuksessa geometria ilmeni luokan seinälle piirrettynä Suomen karttana. Kartasta esimerkki kuviossa 35.



Kuvio 35. Esimerkki piirustuksesta, jossa on Suomen kartta seinällä (B-luokka, poika)

Kaiken kaikkiaan A-luokan piirustuksista löytyi enemmän kappaleita ja B-luokan piirustuksista enemmän tasokuvioita oppilaiden vihoista tai taululta. Suurimassa osassa piirustuksista ei näkynyt geometrisia välineitä ollenkaan kummallakaan luokalla.

7.2.3 Tavat ja järjestys

Kolmas ulottuvuus koostui luokan järjestyksen ja käytöksen ylläpitämisestä sekä istumajärjestyksestä. Tuloksista selviää luokan istumajärjestyksen lisäksi se, onko luokan työrauhan ylläpitäminen oppilas- vai opettajajohtoista sekä missä määrin piirustuksissa ilmenee järjestyksen ja käytöksen säätelyä oppilaiden käsityksen mukaan. Taulukoihin 19 ja 20 on koottu tulokset järjestyksen ja käytöksen ylläpidosta.

Taulukko 19. Järjestyksen ja käytöksen ylläpitäminen luokalla A

Järjestys ja käytös	Oppilaat		Työt		Pojat	
	A	%	A	%	A	%
Opettajajohtoista	1	4	0	0	1	10
Ei näy kuvassa	22	96	13	100	9	90

Taulukko 20. Järjestyksen ja käytöksen ylläpitäminen luokalla B

Järjestys ja käytös	Oppilaat		Työt		Pojat	
	B	%	B	%	B	%
Oppilasjohtoista	5	21	2	17	3	25
Opettajajohtoista	2	8	1	8	1	8
Ei näy kuvassa	18	75	9	75	9	9

Taulukosta 19 huomataan, että A-luokalla vain yhdessä piirustuksessa ilmeni järjestyksen ja käytöksen ylläpitämistä. Piirustuksessa opettaja oli kirjoittanut taululle ”hiljaisuutta”. Tästä voidaan todeta, ettei oppilaiden käsityksessä geometrian opetuksesta korostu järjestyksen ja käytöksen ylläpito. Piirustuksista ei kuiten-

kaan voida päätellä johtuuko tämä siitä, etteivät oppilaat koe tärkeäksi tuoda työrauhaa esille, viekö tehtäväännossa geometria huomion opetuksen muilta osa-alueilta vai onko luokassa niin vähän häiriökäyttäytymistä, etteivät oppilaat kiinnitä arjessaan erityistä huomiota järjestyksen ja käyttäytymisen ylläpitämiseen. Näiden ulkopuolelle jää vielä monia muita näkökulmia, joiden vuoksi piirustuksista ei voi tehdä suoria päätelmiä luokan todellisesta tilanteesta. Toisaalta tämän selvittäminen ei myöskään ollut tutkielman tavoite, vaan tarkoituksena oli nimenomaan selvittää, mikä oppilaiden käsitys on geometrian opetuksesta.

Taulukosta 20 huomataan, että B-luokalla 75% oppilaista ei tuo piirustuksessaan esille järjestyksen ja käytöksen ylläpitoa. A-luokalla vastaava osuus oli 96%. Sen sijaan viiden oppilaan piirustuksessa ylläpitoa tapahtuu oppilaiden toimesta. Tämä on 21% koko luokan oppilasmäärästä. Oppilaiden negatiivisten kommenttien yhteydessä oli esiteltynä kommentteja, jotka kuuluvat samalla myös tähän aihealueeseen. Kahdessa piirustuksessa puolestaan opettaja ylläpitää luokan järjestystä sanomalla ”shhh, tunti alkaa” ja ”hsst”. Näistä löytyy esimerkit aiemmin kuvioista 25 ja 33. Myöskään B-luokan kohdalla tuloksista ei kuitenkaan voida tehdä suoria päätelmiä, mikä käsitys oppilailla on järjestyksen ja käytöksen ylläpitämisestä geometrian tunneilla tai geometrian opetuksen yhteydessä. Seuraaviin taulukoihin 21 ja 22 on koottu luokkien istumajärjestystä koskevat tulokset.

Taulukko 21. Luokkahuoneen istumajärjestys luokalla A

Istumajärjestys	Oppilaat		Tytöt		Pojat	
	A	%	A	%	A	%
Rivit /+ sarakkeet	6	26	5	38	1	10
Yksittäiset /+ ryhmät	1	4	0	0	1	10
Pöytäryhmiä	9	39	5	38	4	40
Tunnistamaton	6	26	2	15	4	40
Ei näy (ei pöytiä)	1	4	1	8	0	0

Taulukko 22. Luokahuoneen istumajärjestys luokalla B

Istumajärjestys	Oppilaat		Työt		Pojat	
	B	%	B	%	B	%
Rivit /+ sarakkeet	18	75	9	75	9	75
Yksittäiset / + ryhmät	2	8	1	8	1	8
Tunnistamaton	3	13	2	17	1	8
Ei näy (ei pöytiä)	1	4	0	0	1	8

Taulukon 21 pohjalta nähdään, että A-luokan oppilaiden piirustuksissa pulpetit olivat enimmäkseen pöytäryhminä, riveinä tai sarakkeina. Näistä pöytäryhmiä oli eniten, yhteensä yhdeksässä piirustuksessa. Näiden osuus oli 39% koko luokan oppilasmäärästä. Taulukosta 22 huomataan, että B-luokalla ylivoimaisesti yleisin istumajärjestyksen muoto oli rivit tai sarakkeet 75%:n osuudella. Yhteensä kahdeksantoista oppilasta oli piirtänyt piirustukseensa istumajärjestyksen riveiksi tai sarakkeiksi tai molempien yhdistelmäksi. Molemmilla luokilla oli jonkin verran piirustuksia, joista istumajärjestyksestä ei voinut määrittää. Näissä piirustuksissa pöytiä oli joko hyvin vähän tai ei ollenkaan. Molemmilla luokilla oli myös yksittäisiä piirustuksia, joissa pulpetit olivat sekoitus yksittäisiä ja vierekkäisiä pulpetteja.

7.3 Yhteenveto tuloksista

Ensimmäisen ulottuvuuden eli suhteiden osalta molemmissa luokissa noin 50% oppilaista piirsi opettajan taulun eteen. Molemmissa luokissa oli myös suurin piirtein saman verran piirustuksia, joissa opettajaa ei ollut lainkaan (A: 22% ja B: 25%). A-luokalla saman verran oppilaita oli piirtänyt opettajan pöydän luokse ja yksittäisten oppilaiden piirustuksissa opettaja oli joko muualla luokassa tai oppilaiden joukossa. B-luokalla 13% oppilaista piirsi opettajan pöydän luokse ja saman verran muualle luokkaan. Opettajan sijainnin suhteen luokkien piirustukset olivat hyvin samankaltaisia ja opettajan yleisin paikka eli taulun edusta erottui molemmilla luokilla selvästi. Myös opettajan välittämän tuen suhteen tilanne oli varsin samanlainen luokkien välillä. Molemmilla luokilla noin 80% oppilaista ei

ilmaissut piirustuksessaan opettajan tukea ollenkaan. B-luokan piirustuksissa erilaisia tuen muotoja esiintyi hieman enemmän, kuin A-luokalla, mutta molemmilla luokilla nämä olivat vain yksittäisiä piirustuksia.

Taulukoiden 13 ja 14 pohjalta huomataan, että molemmissa luokissa suurin osa oppilaista on piirtänyt oppilaat istumaan pulpettien ääreen (A: 91% ja B: 75%). B-luokalla osuus on kuitenkin huomattavasti alhaisempi ja B-luokan oppilaiden piirustuksissa esiintyi enemmän vaihtelua oppilaiden sijoittelussa luokkahuoneeseen. Oppilaiden osallistumisessa löytyi sekä eroja että yhtäläisyyksiä luokkien välillä. Molemmilla luokilla melkein 40% oppilaista piirsi oppilaat tekemään tehtäviä pulpettien ääreen. Samaten sekä A- että B-luokalla matemaattista ajattelua tai keskustelua ei esiintynyt 40%:ssa piirustuksista. A-luokalla itsenäistä työskentelyä ilmeni 43%:ssa piirustuksista ja oppilaiden välinen kommunikointi jäi tunnistamattomaksi 52%:ssa piirustuksista. B-luokalla vastaavat luvut olivat 17% ja 71%. B-luokalla oppilaiden välisiä negatiivisia kommentteja ilmeni neljässä piirustuksessa, kun taas A-luokalla ei ollenkaan.

A-luokan piirustuksissa opetusmenetelminä esiintyi opettajajohtoista työskentelyä, itsenäistä työskentelyä sekä yhdessä työskentelyä. 57%:ssa piirustuksista menetelmä ei ilmennyt tai sitä ei voinut tunnistaa. B-luokalla vastaava luku oli 88% ja tämän ohella piirustuksissa ilmeni vain yksi muu menetelmä, joka oli itsenäinen työskentely kolmen oppilaan piirustuksessa.

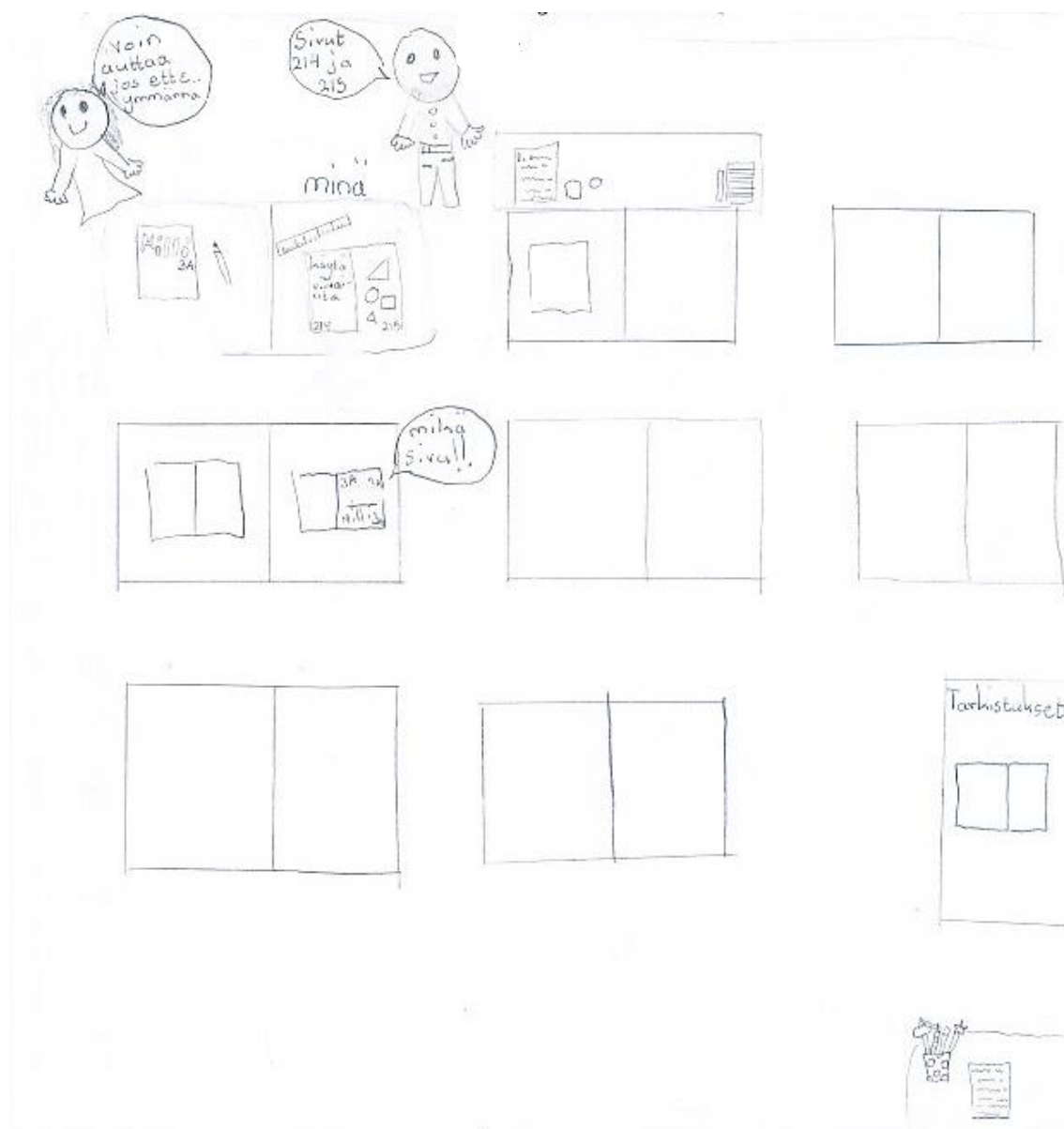
Toisen ulottuvuuden eli tavoitteen osalta luokkien tuloksista löytyi yhtäläisyyksiä sekä eroja. A-luokalla 65% oppilaista oli piirtänyt oppitunnin sisällön taululle ja 39% välittämään opettajasta. B-luokalla vastaavat luvut olivat 50% ja 29%. Kummallakaan luokalla piirustuksesta välittyvä oppitunnin sisältö ja oppilaiden toiminta ei vastannut toisiaan kuin yksittäisissä piirustuksissa. A-luokalla osuus oli hiukan suurempi B-luokkaan verrattuna. B-luokalla oppitunnin sisältö ei ollut näkyvissä 50%:ssa piirustuksista, kun A-luokalla vastaava osuus oli 30%.

Kolmannessa ulottuvuudessa eli tavoissa ja järjestyksessä luokkien väliltä löytyi eroja molemmista aihealueista. A-luokalla vain yksi oppilas oli piirtänyt järjestyk-

sen ylläpitoa piirustukseensa, kun B-luokalla vastaava määrä oli seitsemän oppilasta. A-luokan oppilaan piirustuksessa järjestyksen ylläpito oli opettajajohtoista, kun B-luokalla esiintyi sekä opettaja- että oppilasjohtoista järjestyksen ylläpitoa. Kuitenkin molemmilla luokilla suurimmassa osassa piirustuksista järjestykseen ja käyttöön puuttumista ei ilmennyt (A: 96% ja B: 75%). B-luokalla yleisin istumajärjestyksen muoto oli rivit tai sarakkeet 75%:n osuudella. Sen sijaan A-luokalla yleisin istumajärjestys oli pöytäryhmät 39%:n osuudella.

Luokkien luokanopettajat tekivät piirustukset sen mukaa, millaisen piirustuksen he kuvittelevat oman luokkansa keskiverto-oppilaan piirtävän geometrian tunnistaa. A-luokan luokanopettaja piirsi piirustukseensa geometrinen muotojen luokittelua, piirtämistä sekä mittaamista. Näistä mittaamista ja piirtämistä ilmeni myös oppilaiden piirustuksissa.

B-luokan luokanopettaja piirsi piirustukseensa geometrisia muotoja taululle sekä opettajan kyselemään muotojen nimityksiä. Piirustuksessa oli oppilaita pulpettien ääressä, joista osa viittasi, osa tarkkaili ja osa mietti vastauksia mielessään. Opettaja mainitsi käyttäneensä digitaalisia opetusmateriaaleja, joiden pohjalta hän kyseli oppilailta geometrisia kysymyksiä. Piirustuksesta kävi myös ilmi, että geometrian opiskelussa käytettiin viivoittimia ja erityisopettaja kävi kolmesta viiteen kertaa viikossa auttamassa oppilaita tehtävien teossa. Opettaja kirjoitti myös hyödyntävänsä geometriaa muiden oppiaineiden opetuksessa, esimerkiksi teknisen työn tunneilla. Erityisesti taululla näkyvät geometriset kuviot, joiden nimityksiä opettaja kyselee oppilailta, välittyi myös oppilaiden piirustuksista. Yhdessä B-luokan tytön piirustuksessa oli kaksi aikuista, mutta ei yhtään oppilaita. Opettajan piirustuksen pohjalta ymmärsin, että toinen aikuisista on erityisopettaja, joka käy luokassa auttamassa oppilaita. Loppuun vielä esimerkki tästä piirustuksesta alla olevassa kuviossa 36.



Kuvio 36. Esimerkki piirustuksesta, jossa on luokanopettaja sekä erityisopettaja (B-luokka, tyttö)

8 Luotettavuus

Määrällisessä tutkimuksessa tutkimuksen luotettavuuden arviointi perustuu käsitteisiin validiteetti ja reliabiliteetti, jotka yhdessä muodostavat tutkimuksen kokonaisluotettavuuden. Tutkimuksen validius kertoo sen, kuinka hyvin tutkimus mittaa tutkittavaa asiaa ja reliaabelius sen, kuinka hyvin tutkimus tuottaa ei-satumanvaraisia tuloksia. Toisin sanoen määrällisen tutkimuksen kokonaisluotettavuus on hyvä, kun tutkittavien joukko on tarpeeksi kattava ja mittaaminen sisältää mahdollisimman vähän satunnaisia virheitä. (Vilkka, 2007, s. 149-152.)

Tämän tutkielman osalta ei kuitenkaan ole tarkoituksenmukaista arvioida tutkielman luotettavuutta vain määrällistä tutkimusta koskevien kriteerien mukaan, koska tutkielma ei ole puhtaasti määrällinen. Tutkielman aineiston analyysi on määrällistä ja lukuihin perustuvaa, mutta aihe sekä itse aineisto enemmän laadullista. (Metsämuuronen, 2009, s. 220; Hirsjärvi, Remes & Sajavaara, 2009, s. 161, 164; Eskola & Suoranta, 1998, s. 14). Tutkielman luotettavuuden arvioinnissa hyödynnetään laadullisen tutkimuksen kriteereitä, joiden mukaan luotettavuuden tarkastelu perustuu tutkijaan sekä tutkimusprosessiin kokonaisuudessaan. (Eskola & Suoranta 1998, s. 211.)

Hirsjärven ja muiden (2009, s. 181-182) mukaan laadullisessa tutkimuksessa ei ole tavoitteena etsiä tilastollisia säännönmukaisuuksia tai tehdä yleistäviä päätelmiä, vaan pyrkiä ymmärtämään tutkimuskohdetta. Tutkielmassa korostuu erityisesti tutkittavan eli piirustuksen tehneen oppilaan ymmärtäminen. Tavoitteena oli ymmärtää, mitä oppilas oli halunnut piirustuksellaan kertoa ja, mitä piirustus kertoi oppilaan käsityksestä geometriaa ja geometrian opetusta kohtaan. Myös edellä mainittujen syiden vuoksi tutkielman luotettavuutta arvioidaan laadullisten kriteerien mukaan.

Laadullisessa tutkimuksessa luotettavuutta voidaan arvioida tutkielman uskottavuuden, siirrettävyyden, varmuuden sekä vahvistettavuuden kriteereillä Eskola & Suoranta, 1998). Luotettavuus perustuu siihen, että tutkijan käyttämät käsitteet sekä tulkinnot kuvaavat mahdollisimman hyvin tutkittavien käsityksiä. Tässä puolueettomuus nousee myös tärkeäksi käsitteeksi. (Eskola & Suoranta, 1998, s. 211; Tuomi & Sarajärvi 2002, s. 136.) Piirustuksien analysoinnissa keskityttiin

siihen, että jokainen piirustus analysoitiin samalla tavalla. Tämän varmistamiseksi analysoinnissa palattiin useita kertoja taaksepäin tarkastamaan arvioinnin yhteneväisyys. Tutkielman etenemisen aikana pidettiin tutkimuspäiväkirjaa, johon merkittiin muistiinpanoja kaikista piirustuksista, joiden analysointi ei ollut selkeää ja, joiden sisällön suhteen jouduttiin tekemään tulkintoja.

Edellä mainittujen lisäksi ennen analysointia kartoitin, mitä käsityksiä minulla tutkijana on aiheesta, etten antaisi omien käsitysteni vaikuttaa piirustuksien analysointiin tai tutkimustulosten tulkintaan. Näin pyrin takaamaan, että tutkimustulokset kuvaisivat mahdollisimman hyvin tutkittavien oppilaiden käsityksiä geometriasta ja geometrian opetuksesta. Analysoinnin lopuksi kaikki piirustukset käytiin kertaalleen läpi satunnaisina ryhminä analysoinnin yhtenevyyden tarkistamiseksi. Kaiken kaikkiaan piirustukset tarkistettiin kolme kertaa mahdollisten virheiden poissulkemiseksi.

Laadullisen tutkimuksen luotettavuuden kriteereihin kuuluu myös tutkimuksen siirrettävyys. Tutkimus tulisi pystyä toteuttamaan toisessa kontekstissa (Lincoln & Guba, 1985, s. 297.) Siirrettävyyteen vaikuttaa paljolti se, kuinka samanlaisia ympäristöt ovat. Tämän tutkielman kannalta siirrettävyys on haaste. Aineistoon saattaa vaikuttaa esimerkiksi oppilaiden mieliala, vireystaso, luokan istumajärjestys sekä piirustuksien teon ajankohdan sijoittuminen suhteessa oppilaan koulupäivään. (Tuomi & Sarajärvi 2002, s. 136.)

Tutkielman luotettavuutta varmuuden osalta parantaa se, että tutkielman tekijä on kerännyt aineiston kokonaan itse. Aineiston kerääminen mahdollisti oppilaiden ohjeistuksen suunnittelun, oppilaiden työskentelyn seuraamisen sekä oppilaiden kysymyksiin vastaamisen. Samalla, kun oppilaat tekivät piirustuksia, tutkija pystyi, etteivät oppilaat vilkuile vierustoverin piirustusta. Varmuuden näkökulma sisältää sekä ulkoisten että ilmiöstä johtuvien vaihtelua aiheuttavien tekijöiden tarkastelun, joihin edellä mainitut kuuluvat. (Eskola & Suoranta, 1998, s. 212; Tuomi & Sarajärvi 2013, s. 136–137.)

Tutkielman luottavuuteen vahvistettavuuden näkökulmasta vaikuttavat tutkijan tekemät kuvaukset aineiston koonnista, analysoinnista sekä tutkimustulosten tulkinnoista. Tutkielman luotettavuutta parantaa siis se, että lukijalle kerrotaan tutkielman vaiheista sekä tutkijan tekemistä ratkaisuksista mahdollisimman tarkasti. Vahvistettavuuden osalta tutkielman luotettavuutta nostavat mallianalysoinnit oppilaiden piirustuksista. Sekä geometriaa että geometrian opetusta kuvaavista piirustuksista tehtiin mallianalysoinnit, jotta lukija olisi tietoinen molempien piirustustyyppien analysoinnin vaiheista. Käytetty analysointiväline esiteltiin monipuolisesti ja kattavasti. Lukijan ymmärryksen helpottamiseksi, analysointivälineen pohjalta tehdyt tulostaulukot on lisätty liitteiksi. Näin lukija näkee tarkalleen, mitä piirustuksista on analysoitu. (Tuomi & Sarajärvi, 2013, s. 156–157; Tuomi & Sarajärvi 2002, s. 137.)

9 Pohdintaa

Tutkielman tavoitteena oli selvittää, minkälaisia käsityksiä kolmasluokkalaisilla oppilailla on geometriasta ja geometrian opetuksesta. Aihetta tutkittiin oppilaiden tekemien piirustuksien pohjalta piirrostutkimuksen keinoin. Geometrian ja geometrian opetuksen teoriataustaan perehtyessäni huomasin, ettei oppilaiden käsityksistä näitä kohtaan löydy juurikaan aiempaa tutkimusta. Sen sijaan oppilaiden käsityksiä yleisesti matematiikasta ja matematiikan tuntien tunneilmapiiiristä oli tutkittu enemmän. Tämän vuoksi hyödynsin tutkielmani teoriaosuudessa ”Draw Me Emma” -tutkimushankkeen tuloksia.

Vähäisen tutkimustiedon lisäksi törmäsin myös toiseen haasteeseen liittyen geometrian käsitteiden rajaukseen. Geometria sisältää suuren määrän käsitteitä, jotka ovat jatkumoa toisilleen geometrian systemaattisen rakenteen vuoksi (Kurritu ym., 2006, s. 2; Kahanpää, 2011, s. 1 ja 7-8.) Tutkielmani kannalta olisi kuitenkin ollut epäolennaista määritellä kaikkia geometrian käsitteitä tai edes kaikkia alakoulun geometrian käsitteitä. Päädyin rajaamaan käsitteiden määrittelyn alakoulun yleisimpiin käsitteisiin oppilaiden piirustuksien sekä aiemman tutkimuksen pohjalta. Käsitteiden rajauksessa huomioin kuitenkin, ettei teoriapohjaan jää aukkoja tai epäjohtonmukaisuuksia.

Piirrostutkimukset olivat entuudestaan itselleni varsin vieras tutkimuksen teon muoto. Oppilaiden piirustuksien tutkiminen oli mielenkiintoista, mutta siihen kului suunniteltua enemmän aikaa. Vaikeinta piirustuksien tutkimisessä oli yhtäläisen linjan pitäminen jokaisen piirustuksen kohdalla, koska piirustukset olivat todella erilaisia keskenään. Osa piirustuksista oli selkeästi helpommin analysoitavia, kuin toiset. Piirustuksia tutkiessa kirjoitin jatkuvasti muistiinpanoja analysointivälineiden eri kohdista, jotta pystyin säilyttämään analyysin yhtenevyyden ensimmäisestä piirustuksesta viimeiseen saakka. Pidin kaikki piirustukset koko ajan lähelläni ja tarkastelin jo analysoituja piirustuksia varmistaakseni, että menetellen vaikeassa kohdassa samalla lailla, kuin muiden piirustuksien kanssa.

Tutkimustulosten pohjalta selvisi, että tutkittavien kolmasluokkalaisten käsitys geometriasta keskittyi geometrisiin muotoihin sekä niiden rakenteluun. Molempien luokkien piirustuksista löytyi eniten tasokuvioita ja toiseksi eniten kappaleita. Tulos vastasi täysin aiheesta aikaisemmin toteutetun saksalaisen tutkimuksen tuloksia (Kuzle ym., 2018). Mielenkiintoinen yhtäläisyys maiden välillä oli myös se, että oppilaiden piirustuksista ei välittänyt geometrinen muotojen ominaisuuksien sisäistäminen. Molempien maiden tulokset selittyvät geometrian opetuksen rakenteella. Kaiken kaikkiaan geometrian opetuksessa on varattu eniten tilaa tasogeometrialle kaikkien maiden kansallisissa matematiikan opetussuunnitelmissa (Jones, 2000, s. 81).

Saksalaisessa tutkimuksessa oli määritelty myös oppilaiden geometrisen ajattelun kehittyneisyys oppilaiden piirustuksien pohjalta hyödyntäen van Hielen teoriaa. Tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat ensimmäisellä Hielen tasolla eli visualisoinnin tasolla. Myös tutkielmaani osallistuneet oppilaat vaikuttivat olevan visualisoinnin tasolla, koska oppilaiden piirustuksissa korostuivat kuvioden ulkomuodot, mutta ominaisuudet jäivät vähäiselle huomiolle. Visualisoinnin tasolle on tyypillistä se, että oppilas osaa tunnistaa, nimetä sekä piirtää yleisimmät geometriset muodot. (Van Hiele, 1999, s. 311; Silfverberg, 1986, s. 5; Silfverberg, 1999, s. 27; Douglas & Clements, 1992, s. 427; Korkatti, 2016, s. 53.) Tämä näyttäytyi selkeästi piirustuksissa, koska suurin osa oppilaista piirsi piirustukseensa ympyrän, kolmion ja neliön tai jonkin edellä mainituista kuvioista. Osa oli piirtämisen ohella myös nimennyt kuviot. Vain yksittäisissä piirustuksissa ilmeni ominaisuuksiin viittaavia asioita.

Myös Silfverbergin (1999, s. 60) mukaan oppilaat ovat tasoilla 1-3 peruskoulun matematiikassa. Peruskoulu kattaa myös yläkoulun eli vuosiluokat 7.-9. Tämän pohjalta voisi ajatella, että alakoulu ikäiset oppilaat sijoittuvat pääosin ensimmäiselle tai toiselle tasolle. Koska tutkimukseen osallistuneet oppilaat olivat kolmasluokkalaisia, niin todennäköisesti ensimmäinen taso vastaa parhaiten heidän geometrisen ajattelun kehittyneisyyttä. Tutkielmani tulokset puoltavat tätä ajatusta. Silfverberg (1999, s. 35) mainitsee myös, että van Hielen teorian tasojen lukumäärää kohtaan on herännyt kritiikkiä, koska teoria ei sisällä ollenkaan nolla

tasoa, vaan alkaa suoraan tasolta, joka edellyttää jo geometrian osaamista. Erityisesti alle kouluikäisten tutkimisen parissa olisi hyödyllistä, että tasoja olisi enemmän. Tutkielmassani ensimmäinen taso vastasi hyvin oppilaiden geometrisen ajattelun kehittyneisyyttä. Jos tutkimuksen kohteena olisi ollut ensimmäisen luokan oppilaat niin silloin tasojen lukumäärä olisi voinut aiheuttaa haasteita.

Oppilaiden käsityksiä geometriasta on tutkittu myös Kroatiassa neljän oppilaan pilottitutkimuksella ennen Saksan suuremman mittakaavan tutkimusta. Myös tässä tutkimuksessa geometriset muodot korostuivat oppilaiden käsityksissä geometriasta. Kroatiassa oppilaiden piirustuksissa tyypillisimmät geometriset muodot olivat viivoja, tasokuvioita tai kappaleita. Erityisesti tasokuvioista oppilaat osasivat piirtää useamman erilaisen. Näistä yleisimmät olivat ympyrä, kolmio ja neliö, kuten myös tässä tutkielmassa. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 48-49.)

Kroatiassa tutkimukseen kuului myös oppilaiden geometrian opetusta koskevien käsityksien tutkiminen. Oppilaiden piirustuksissa geometrian tuntien ilmapiiri oli pääsääntöisesti positiivinen tai neutraali. Kaikissa piirustuksissa oppilaat työskentelivät itsenäisesti ja opettaja oli luokan edessä. Tunnilla tapahtuva vuorovaikutus kuvattiin pääsääntöisesti oppilaan ja opettajan väliseksi. Oppilaiden keskinäistä vuorovaikutusta ei ilmennyt. Opettajan ja oppilaiden välinen vuorovaikutus oli positiivista, mikä näkyi kannustavina kommentteina. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 49-50.)

Sekä kroatialaisen tutkimuksen että oman tutkielmani tulokset olivat hyvin samankaltaisia. Yhteisiä piirteitä olivat esimerkiksi opettajan piirtäminen luokan eteen taulun luokse, oppilaiden itsenäinen työskentely, sekä tehtävien teko pulpettien äärellä. Eroavaisuuksiakin löytyi, jotka liittyivät pääosin negatiivisiin kommentteihin, joita tutkimissani piirustuksissa esiintyi. Sen sijaan kroatialaisessa tutkimuksessa negatiivisia ajatuskuplia tai puhekuplia ei ilmennyt. Tässä kuitenkin on tärkeä huomioida kyseisen tutkimuksen aineiston suuruus. Tämän tutkielman aineisto koostui lähes sadasta piirustuksesta, kun kroatialaisessa tutkimuksessa

oli mukana neljän oppilaan piirustukset. Myös tutkimuksiin osallistuneiden oppilaiden ikähaitari oli erilainen, koska kroatialaiseen tutkimukseen osallistuvat oppilaat olivat neljältä eri vuosiluokalta. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018.)

Tutkielman teoriassa esittelin matematiikan opetuksen tavoitteita geometrian osalta. 1.-2.-luokilla geometrian opetuksessa korostui matemaattiset käsitykset ja merkinnät, geometriset muodot, ominaisuuksien havainnointi sekä mittaamisen periaate. 3.-6. -luokkien geometrianopetuksen tavoitteet olivat jo huomattavasti laajemmat sisältäen erityisesti mittaamiseen kuuluvia asioita kuten mittayksiköiden käyttöä ja mittaustulosten arviointia. Kolmannella luokalla olevat oppilaat ovat käyneet läpi alkuopetuksen geometrian opetuksen eli 1.-2. -luokkien tavoitteet vastaavat paremmin oppilaiden geometrian opetuksen taustaa. Kuitenkin 3.-6. -luokan geometrian opetuksen tavoitteet jakautuvat neljälle luokalle, minkä vuoksi ei voi olettaa, että kolmasluokkalainen oppilas hallitsisi kaikkia tavoitteista. (POPS, 2014, s. 128-129 ja 235.)

Erityisesti A-luokan kohdalla tilanne oli selkeä, koska oppilaat olivat opiskelleet geometriaa viimeksi toisella luokalla, kun taas B-luokalla geometriaa oli ollut joulukuussa 2018. Tutkielman tuloksista oli mielenkiintoista huomata, että oppilaiden käsitys geometriasta sisälsi alkuopetuksen geometrialle ominaisia sisältöjä. Erityisesti geometriset muodot, jotka korostuivat myös tavoitteissa, olivat vahvasti esillä oppilaiden piirustuksissa. Kroatialaisen tutkimuksen yhteydessä mainittiin, että haastatteluissa moni oppilas mainitsi mittaamisen olevan osa geometriaa, vaikka se ei välttämättä näkynyt piirustuksessa. (Glasnović Gracin & Kuzle, 2018, s. 48-49.) Tässä tutkielmassa haastatteluosio rajattiin työn ulkopuolelle, jotta tutkielma pysyi Pro Gradu -tutkielman mittoissa. Haastattelut olisivat kuitenkin voineet tarjota mielenkiintoisia tuloksia piirustuksien rinnalle. Erityiseksi mielenkiinnonkohteeksi jäi, olisiko mittaaminen ilmennyt tutkielmaan osallistuneiden oppilaiden haastatteluissa. Piirustuksien pohjalta mittaaminen ei korostunut oppilaiden käsityksissä geometriasta.

Oppilaiden haastattelut piirustuksien tukena olisi hyvä jatkotutkimus aiheesta. Nyt tutkielmaan osallistuneiden oppilaiden lukumäärä oli vielä suhteellisen pieni, jo-

ten suurempi aineisto tarjoaisi myös varmasti lisää kiinnostavia havaintoja. Käytännön syistä aineisto kerättiin pääkaupunkiseudulta, mutta tutkimuksen toteuttaminen koko Suomen mittakaavassa antaisi laajemman kuvan oppilaiden käsityksistä geometriaa ja geometrian opetusta kohtaan. Aiheen tutkimisen kannalta on positiivista, että ”Draw Me Emma” -tutkimushanke on edelleen käynnissä ja tiedossa on lisää tuloksia oppilaiden käsityksistä.

Lähteet

Cleaver, E., Heath, S. & Brooks, R. & Ireland, E. (2009). Researching young people's lives. Luettu 10.2.2019, https://www.researchgate.net/publication/313212401_Researching_young_people%27s_lives

Douglas H. & Battista, M. (1992). Clements. Geometry and spatial reasoning. Luettu 15.3.2019, https://www.researchgate.net/publication/258932007_Geometry_and_spatial_reasoning

Eldén, S. (2012). Inviting the messy: Drawing methods and "children's voices". Luettu 10.2.2019, Luettu <http://chd.sagepub.com/content/early/2012/06/01/0907568212447243>

Eskola, J. & Suoranta, J. (1998). Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Tampere: Vastapaino.

Glasnović Gracin, D. & Kuzle, A. (2018). Drawings as External Representations of Children's Fundamental Ideas and the Emotional Atmosphere in Geometry Lessons. Luettu 2.11.2018 https://www.researchgate.net/publication/326036452_Drawings_as_External_Representations_of_Children's_Fundamental_Ideas_and_the_Emotional_Atmosphere_in_Geometry_Lessons

Glasnović Gracin, D., Kuzle, A. & Klunter, M. (2018). Primary grade students' fundamental ideas of geometry revealed via drawings. Luettu 2.11.2018, https://www.researchgate.net/publication/328702624_Primary_grade_students'_fundamental_ideas_of_geometry_revealed_via_drawings

Hannula, M. S. (2007). Finnish research on affect in mathematics: Blended theories, mixed methods and some findings. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39(3), 197–203. Luettu 7.4.2019 doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-007-0022-7>

Hansen, V. (1998). Teoksessa C. Mammana & V. Villani (toim.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study (s. 9-18). The Netherlands: Kluwer.

Harrison, L. J., Clarke, L. & Ungerer, J. A. (2007). Children's drawings provide a new perspective on teacher-child relationship quality and school adjustment. Early Childhood Research Quarterly, 22(1), 55–71. Luettu 20.2.2019 doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecresq.2006.10.003>

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. (2009). Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

Hsu, Y-H. (2014). Analyzing children's drawings. Luettu 5.3.2019, http://www.21caf.org/uploads/1/3/5/2/13527682/hsu_ya.pdf

Ikäheimo, H. & Risku, A-M. (2004). Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s.222-240). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Joki, J. (2004). *Hahmottavaa geometriaa : Didaktisen geometrian alkeita perusopetukseen*. Helsinki: Opetushallitus.

Jones, K. (2000). Critical issues in the design of the geometry curriculum. Teoksessa B. Barton (Toim.), *Readings in mathematics education* (s. 75–90). New Zealand: University of Auckland.

Kahanpää, L. (2011). *Alkeet : Kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometria*. Jyväskylä: Lauri Kahanpää.

Kahanpää, L., & Kangas, O. (2002). *Taustakuvia : Matematiikkaa alkuopettajille*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto, opettajankoulutuslaitos.

Kahanpää, L., Kurittu, L. & Hokkanen, V-M. *Geometria*. Jyväskylän Yliopisto. Luettu 23.11.2018, <https://docplayer.fi/23041590-Lassi-kurittu-veli-matti-hokkanen-ja-lauri-kahanpaa-1-geometria.html>

Kahanpää, L., Hannukainen, M., & Högmänder, H. (1993a). *Johdatus matematiikkaan*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.

Kiilakoski, T. & Rautio, P. (2015). Viivojen jäljet. Piirtäminen aineiston tuottamisen menetelmänä. Teoksessa Böök, M. L., Kärjä, A-V., Mustola, M., & Mykkänen, J. (toim.), *Visuaaliset menetelmät lapsuuden- ja nuorisotutkimuksessa*. Helsinki: Nuorisotutkimusseura.

Kitahara, R. & Matsuishi, T. (2001). Research on children's drawings. Luettu 3.3.2019, http://medico-ped-agogy.org/childrenpicturesummaryJ_Ewp.pdf

Korkatti, S. (2016). *Geometriaa laatoittamalla? : Van hielen teorian mukainen geometrinen ajattelu ja tesselaatioon nojautuva laatoitusprojekti peruskoulussa*. Rovaniemi: Lapin yliopisto.

Laine, A & Krzywacki, H. (2014). *Matematiikan didaktiikan opetusmonisteet*.

Laine, A., Ahtee, M., Näveri, L., Pehkonen, E., Portaankorva-Koivisto, P., & Tuohilampi, L. (2015). Collective emotional atmosphere in mathematics lesson based on Finnish fifth graders' drawings. *LUMAT*, 3(1), 87–100.

Lehtinen, M. (2011). *Geometrian perusteita*. Oulu.

Lehtinen, M., J. Merikoski, & T. Tossavainen. (2007). *Johdatus tasogeometriaan*. Helsinki: WSOY.

Lincoln, Y. & Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills: SAGE.

- Malaty, G. (1997). Geometrinen ajattelu. 1, didaktiikka. Espoo: Weilin + Göös.
- Malaty, G. (2002) Matemaattinen ajattelu ja opetus. Teoksessa M-L. Julkunen (toim.), Opetus, oppiminen, vuorovaikutus (s. 111-134). Vantaa: WSOY.
- Malaty, G. (2003). Johdatus matematiikan rakenteeseen. Helsinki: Opetushallitus.
- Malchiodi, C.A. (1998). Understanding Children's drawings. USA(NY): Guilford.
- Mammana, C. & Villana, V. (1998). Geometry and geometry-teaching through the ages. Teoksessa C. Mammana & V. Villani (toim.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study (s. 1-4). The Netherlands: Kluwer.
- Metsämuuronen, J. (2013). Tiivistelmä. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.), Perus-opetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4 (9–12). Opetushallitus.
- Nevanlinna, R. (1973). Geometrian perusteet. Porvoo.
- O'Connor, P. (2007). 'Doing boy/girl' and global/local elements in 10–12 year olds' drawings and written texts. *Qualitative Research* 7(2), 229–247. Luettu 14.2.2019, doi: <http://dx.doi.org/10.1177/1468794107076022>
- Pink, S. (2004). 23 Visual methods. Teoksessa C. Seale, G. Gobo, Jaber F. Gubrium & D. Silverman (toim.), *Qualitative Research Practice* (s. 361– 338). London, England: SAGE publications.
- POPS (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetus-hallitus.
- Risku, A-M. (2002). Leikisti ja oikeesti – oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien. Teoksessa O. Saloranta (toim.) *Ensimmäiset kouluvuodet. Perusopetuksen vuosiluokkien 1–2 opetus* (s. 115-141). Helsinki: Opetushallitus.
- Silfverberg, H. (1986). Van hielen teoria geometrian oppimisessa ilmenevistä tasoista : Tasojen teoreettinen tarkastelu ja mittausmenetelmien kokeilu. Tampere: Tampereen yliopisto.
- Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampere : Tampereen yliopisto.
- Silfverberg, H. (2018). Geometrinen käsitteen muodostus oppimisen tutkimuksen kohteena. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg, & P. Räsänen, (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 86-109). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Stiles, D. A., Adkisson, J. L., Sebben, D., & Tamashiro, R. (2008). Pictures of hearts and daggers: Strong emotions are expressed in young adolescents' drawings of their attitudes towards mathematics. *World Cultures eJournal*, 16(2), 1–14. Luettu 30.11.2018, doi: <http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2013.876155>

Thomson, P. (2008). Doing visual research with children and young people. London: Routledge.

Tikkanen, P. (2008). "Helpompaa ja hauskeempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing house.

Tuomi, J., & Sarajärvi, A. (2002). Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Van Hiele, P. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), s. 310-316.

Vilka, H. (2007). Tutki ja mittaa: Määrällisen tutkimuksen perusteet. Helsinki: Tammi.

Villani, V. (1998). About the present ICMI study. Teoksessa C. Mammana & V. Villani (toim.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study* (s. 4-7). The Netherlands: Kluwer.

Väisälä, K. (1959). *Geometria*. Porvoo: Werner Söderström osakeyhtiön kirjapaino.

Wittmann, E. (1999). Konstruktion eines Geometrieunterrichts ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. Teoksessa H. Henning, & H. Besuden (Toim.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden* (s. 205–223). Oldenburg: Buelmann und Gerriets.

LIITTEET

LIITE 1: Piirustus pohja geometriaa kuvaaviin piirustuksiin

LIITE 2: Piirustus pohja geometrian opetusta kuvaaviin piirustuksiin

LIITE 3: Analysointitaulukko luokka A geometria

LIITE 4: Analysointitaulukko luokka B geometria

LIITE 5: Analysointitaulukko luokka A geometrian opetus

LIITE 6: Analysointitaulukko luokka B geometrian opetus

LIITE 1

Piirustus pohja geometriaa kuvaaviin piirustuksiin

Kuvittele, että olet taiteilija. Hyvä ystäväsi kysyy mitä geometria on.

Piirrä kuva, jossa selität mitä geometria tarkoittaa sinulle.

Käytä luovuutta ja omia ideoitasi.

Minun käsitykseni geometriasta

LIITE 2

Piirustus pohja geometrian opetusta kuvaaviin piirustuksiin

Piirrä kuva geometrian tunnista. Kerro piirustuksellasi minkälaisia geometrian tuntisi ovat ja mitä mieltä olet niistä.

Piirrä piirustukseesi myös luokka, opettaja ja oppilaita. Käytä puhekuuplia ja ajatuskuuplia kuvaamaan luokassa tapahtuvaa keskustelua ja ajattelua.

Merkitse itsesi piirustukseen kirjoittamalla hahmon kohdalle ”minä”.

Minun luokkani geometrian tunnilla

Analysointitaulukko luokka A geometrian opetus

[illegible]

LIITE 6

Analysointitaulukko luokka B geometrian opetus

LUOKKA: 2 Tytöt: A - L Pojat: M - X

1. Ulottuvuus: Suhteet																									
1a. Opettajan sanallinen ja ei-sanallinen viestintä		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Sijainti luokassa	D1A.1.L Taulun edessä				x	x	x	x	x		x	x	x		x	x	x		x			x			
	D1A.2.L Oppilaiden joukossa																								
	D1A.3.L Pöydän luona			x																	x				x
	D1A.4.L Muualla luokassa	x	x			x																			
	D1A.5.L Tunnistamaton sijainti																								
	D1A.6.L Ei opettajaa									x				x				x		x		x		x	
	D1A.7.L Auttaa					x																			
Opettajan tuki	D1A.8.L Positiivinen palaute	x									x														
	D1A.9.L Negatiivinen palaute																								
	D1A.10.L Mat. kysymykset	x			x																				
	D1A.11.L Mat. pyyntö																						x		
	D1A.12.L Tarkkailee		x																						
	D1A.13.L Ei-mat. kommentti																								
	D1A.14.L Passiivinen opettaja																								
	D1A.15.L Ei tukea			x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	D1A.15.L Ei tukea			x		x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1b. Oppilaiden sanallinen ja ei-sanallinen viestintä		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Sijainti luokassa	D1B.1.S Muutama oppilas kuvassa			x						x	x									x					
	D1B.2.S Istuvat pulpettien ääressä		x	x	x		x		x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x
	D1B.3.S Seisovat opettajan vieressä			x							x								x						
	D1B.4.S Seisovat taulun edessä																		x						
	D1B.5.S Muiden joukossa																		x						
	D1B.6.S Muualla	x	x									x									x				x
	D1B.7.S Tunnistamaton sijainti																								
	D1B.8.S Ei oppilaita					x		x										x						x	
Osallistuminen	D1B.9.S Tehtäviä pulpettien äärellä		x			x			x							x	x				x	x		x	x
	D1B.10.S Tehtäviä taululla																								
	D1B.11.S Oppilaat kuuntelevat				x		x																		
	D1B.12.S Oppilas vastaa	x									x												x		
	D1B.13.S Oppilas kysyy		x																						
	D1B.14.S Oppilas pyytää apua																								
	D1B.15.S Yhdessä taululla ratkaisua										x														
	D1B.16.S Osallistuvat keskusteluun	x	x								x	x	x		x	x									
	D1B.17.S Positiivinen kommentti										x										x				
	D1B.18.S Negatiivinen kommentti													x											
	D1B.19.S Ei-mat. keskustelu/ajattelu	x	x							x		x	x		x				x			x	x		x
	D1B.20.S Passiivisia													x											
	D1B.21.S Ei tunnistettavissa							x										x		x					

